$\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones enumerables disjuntas:

Tome $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, donde $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}^*$ disjuntos. Como ya mostramos que $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones finitas $\Rightarrow$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{A}^*, \quad \forall m \geq 1.$$

Luego,

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup \dots \cup A_m)) + \mu^*(Q - \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_m)}_{\subseteq A}) = \mu^*(Q)$$

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup \dots \cup A_m)) + \mu^*(Q - A) \leq$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} (Q \cap A_i)\right) + \mu^*(Q - A) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q - A) \leq$$

Tomando $m \to \infty$

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q\cap A_i) + \mu^*(Q-A) \quad \forall Q\subseteq X.$$

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(Q\cap A_i)\right) + \mu^*(Q-A)$$

$$\geq \mu^*\left(Q\cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*(Q-A) = \mu^*(Q\cap A)+\mu^*(Q-A)$$

La otra desigualdad

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q-A), \quad \forall Q\subseteq X$$

vale por sub-aditividad de μ^*.

$$\Rightarrow \quad \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q-A), \quad \forall Q\subseteq X$$

$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}^*$ $\quad \therefore$ $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo $\cup$ disjuntas enumerables.

en consecuencia $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones enumerables

$A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}^*$ (no necesariamente disjuntos)

Definimos $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 - A_1 \Rightarrow B_2 \cap B_1 = \emptyset$

$B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2) \Rightarrow B_3 \cap B_j = \emptyset, \quad j < 3$

$\dots$

$B_m = A_m - (A_1 \cup \dots \cup A_{m-1})$

y $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $\forall i$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} B_i \in \mathcal{A}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{A}^* \xRightarrow{\text{Límite}} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}^*$.

$\therefore$ $\mathcal{A}^*$ es estable por uniones enumerables.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}^*$ es un sistema Dynkin. Además $\mathcal{A}^*$ es π-sistema.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra.

Paso 4: μ^* es premedida, μ^* es σ-aditiva + $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra

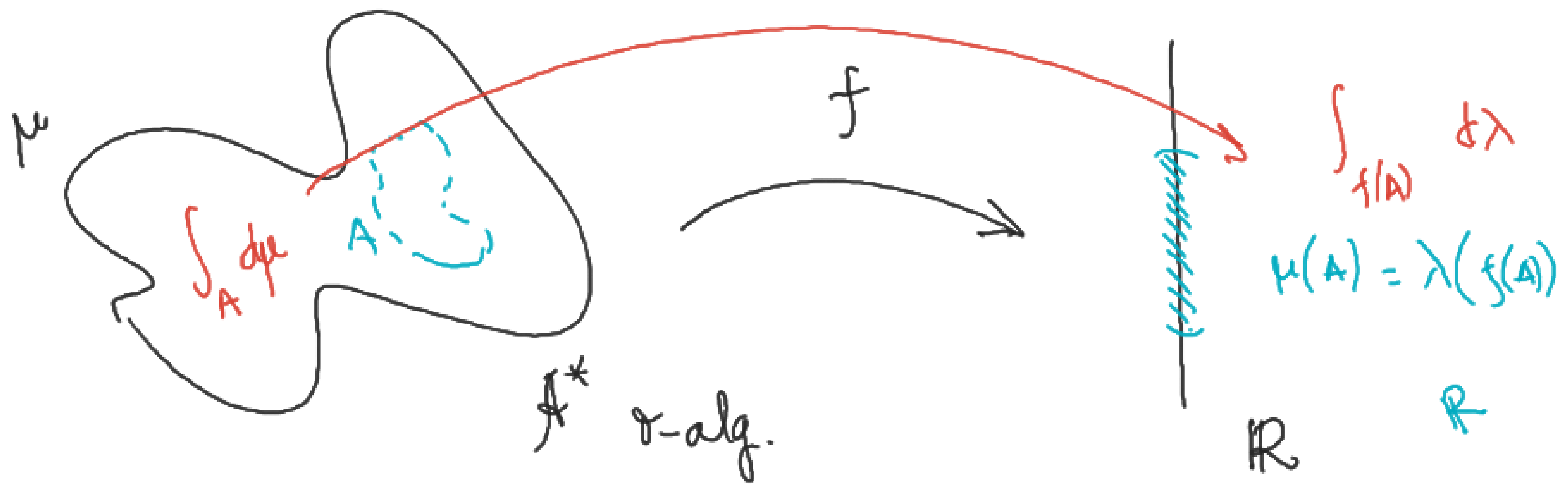
$\Rightarrow$ μ^* es una medida sobre $\mathcal{A}^*$.

Además, $S \subseteq \mathcal{A}^* \Rightarrow \sigma(S) \subseteq \mathcal{A}^*$, y como $\mu^*|_{\sigma(S)} = \mu$, $\therefore$ μ^* es una medida que extiende μ. $\square$

habíamos mostrado que μ^* extiende a μ.

$S \subseteq X$ semi-anillo + μ pre-medida.

Obs! Si existe una secuencia exhaustiva $\{S_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$, con $S_n \nearrow X$ y $\mu(S_n) < +\infty$, $\forall n$. Por el T. de Unicidad, μ^* es la única medida que extiende μ sobre $\sigma(S)$. $\square$



$(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ $\qquad$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$