<u>Paso 2</u>: $\quad \overline{\mu}(S_1 \cup \dots \cup S_t) = \sum_{j=1}^{t} \mu(S_j) \qquad S_j \in \mathcal{S}.$

Suponga $\quad S_1 \cup \dots \cup S_m = T_1 \cup \dots \cup T_n, \qquad S_i, T_j \in \mathcal{S}.$

$S_i \subseteq T_1 \cup \dots \cup T_n \quad , \forall i = 1, 2, \dots, m$

$\Rightarrow S_i = S_i \cap (T_1 \cup \dots \cup T_n) = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} (S_i \cap T_j) \qquad S_i \cap T_j \in \mathcal{S}$

Como μ es aditiva en $\mathcal{S}$ $\Rightarrow \mu(S_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(S_i \cap T_j), \quad \forall i = 1, \dots, m$

Sumando sobre $i = 1, 2, \dots, m$ $\qquad \mu(T_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i \cap T_j) \qquad \forall j = 1, \dots, n$

$$\overline{\mu}(S_1 \cup \dots \cup S_m) = \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(S_i \cap T_j) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu(S_i \cap T_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu(T_j) = \overline{\mu}(T_1 \cup \dots \cup T_n)$$

$\Rightarrow \overline{\mu}$ está bien definida, y $\overline{\mu}$ extiende a μ

para $S_i \in \mathcal{S}$, $\quad \overline{\mu}(S_i) = \sum_{i=1} \mu(S_i) = \mu(S_i).$

Se puede mostrar que $\mathcal{S}_\cup$ es estable bajo uniones finitas disjuntas, y además $S, T \in \mathcal{S}_\cup$, entonces

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_m, \quad T = T_1 \cup \dots \cup T_n, \quad S_i, T_j \in \mathcal{S}$$

$$S \cap T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} T_j = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{(S_i \cap T_j)}_{\in \mathcal{S}} \in \mathcal{S}_\cup$$

$$S - T = \bigcup_{i=1}^{m} S_i - \bigcup_{j=1}^{n} T_j = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \cap \bigcap_{j=1}^{n} T_j^c = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n} (S_i \cap T_j^c)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n} \underbrace{(S_i - T_j)}_{\in \mathcal{S}_\cup} \in \mathcal{S}_\cup$$

$$\Rightarrow S \cup T = (S-T) \cup (S \cap T) \cup (T-S) \in \underline{\mathcal{S}_\cup}$$ semi-anillo

$\bar{\mu}$ es premedida sobre $\mathcal{S}_\cup$:

i) $\bar{\mu}(\emptyset) = \bar{\mu}(\emptyset \cup \dots \cup \emptyset) = \sum \cancel{\mu(\emptyset)}^{0} = 0$

ii) $A \subseteq B, \; A, B \in \mathcal{S}_\cup \Rightarrow \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$

iii) $\bar{\mu}$ es σ-subaditiva: Tome $\{T_k\}_{k\geq 1} \subseteq S_U$ tal que $T = \bigcup_{k\geq 1} T_k \in S_U$.

Existe una secuencia $\{S_n\}_{n\geq 1} \subseteq S_0$ y una secuencia de índices

$0 = i(0) \leq i(1) \leq i(2) \leq \dots$ con

$$T_k = S_{i(k-1)+1} \cup S_{i(k-1)+2} \cup \dots \cup S_{i(k)}$$

$$T_1 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{i(1)}$$

$$T_2 = S_{i(1)+1} \cup \dots \cup S_{i(2)}$$

$$\vdots$$

$$T_k = S_{i(k-1)+1} \cup \dots \cup S_{i(k)}$$

$\Rightarrow T = \bigcup_{k\geq 1} T_k = \biguplus_{\ell=1}^{L} U_\ell$, donde $U_\ell = \bigcup_{i\in J_\ell} S_i$, con $\in S_U$

J_ℓ conjuntos disjuntos de índices y

$$J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_L = \mathbb{N}.$$

Como μ es σ-aditiva

$$\bar{\mu}(T) = \sum_{\ell=1}^{L} \mu(U_\ell) = \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{i\in J_\ell} \mu(S_i) = \sum_{k\geq 1} \sum_{n=i(k-1)+1}^{i(k)} \mu(S_n)$$

$$T_k = \bigcup_{i(k-1)+1}^{i(k)} S_n$$

$$= \sum_{k\geq 1} \bar{\mu}(T_k)$$

$\Rightarrow \bar{\mu}$ es σ-aditiva.

μ^* extiende a μ:

Para cualquier $\mathcal{S}$-cobertura $\{S_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{S}$ de $A \in \mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $\{S_k\} \in \mathcal{C}(A)$

y

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\left(\left[\bigcup_{k\geq 1} S_k\right] \cap A\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{k\geq 1} \left[S_k \cap A\right]\right)$$

σ-subaditiva

$$\leq \sum_{k\geq 1} \bar{\mu}(\underbrace{S_k \cap A}_{\in \mathcal{S}}) = \sum_{k\geq 1} \mu(S_k \cap A) \leq \sum_{k\geq 1} \mu(S_k).$$

Tomando ínfimo sobre $\mathcal{C}(A)$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) \leq \inf_{\mathcal{C}(A)} \left\{ \sum \mu(S_k) \right\} = \mu^*(A).$$

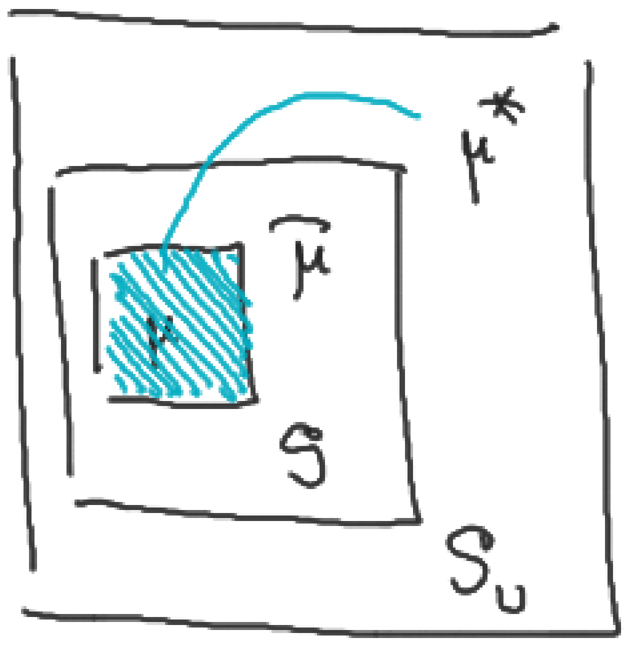
La otra desigualdad resulta de tomar la $\mathcal{S}$-cobertura $\{A, \emptyset, \dots, \emptyset\}$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \cancel{\sum \mu(\emptyset)} = \mu(A).$$

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Recordemos los μ^*-mesurables

$$\mathcal{A}^* = \{ A \subseteq X : \underline{\mu(Q) = \mu(Q\cap A) + \mu(Q-A)},\ \forall Q \subseteq X \}$$



- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$. Sean $S, T \in \mathcal{S}$. Como $\mathcal{S}$ es semianillo

$$T - S = \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_i, \quad S_i \in \mathcal{S}, \text{ disjuntos}$$

μ aditiva y μ^* σ-subaditiva

$$\underline{\mu^*(S\cap T) + \mu^*(T-S)} \le \mu(S\cap T) + \sum_{i=1}^{m} \mu(S_i)$$

$$\le \mu\Big((S\cap T) \cup \dot{\bigcup_{i=1}^{m}} S_i \Big) = \mu(T)$$

$$\Rightarrow \qquad \le \underline{\mu^*(T)}$$

La otra desigualdad $\mu^*(T) \le \mu^*(S\cap T) + \mu^*(T-S)$ vale por la sub-aditividad de μ^*.

$$\Rightarrow \mu^*(T) = \mu^*(T-S) + \mu^*(T\cap S), \quad \forall T, \forall S \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \mu^*(B) = \mu^*(B-S) + \mu^*(B\cap S), \quad \forall B \subseteq X \quad \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*.$$

$\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}^*$: $\quad \mu^*(Q-\emptyset) + \mu^*(Q\cap\emptyset) = \mu^*(Q) + \cancel{\mu^*(\emptyset)} = \mu^*(Q), \ \forall Q \subseteq X$

ii) $A \in \mathcal{A}^* \Rightarrow \mu^*(Q-A) + \mu^*(Q\cap A) = \mu^*(Q) \quad \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^*$

$\mu^*(Q\cap A^c) + \mu^*(Q\cap A) =$

iii) $A, A' \in \mathcal{A}^*$. Como $\mathcal{A}^*$ es $\cup$-estables

$$\Rightarrow \mu^*(Q-A) + \mu^*(Q\cap A) = \mu^*(Q)$$
$$\mu^*(Q-A') + \mu^*(Q\cap A') = \mu^*(Q) \qquad \forall Q \subseteq X.$$

$$\Rightarrow \mu^*(Q\cap(A\cup A')) + \mu^*(Q-(A\cup A'))$$

$$= \mu^*(Q\cap[A \,\dot\cup\, (A'-A)]) + \mu^*(Q-(A\cup A'))$$

$$\leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\cap(A'-A)) + \mu^*(Q-(A\cup A'))$$

$Q\cap A'\cap A^c$

$(Q\cap A^c)\cap A'$

$(Q-A)\cap A'$

$$\leq \mu^*(Q\cap A) + \underbrace{\mu^*((Q-A)\cap A') + \mu^*((Q-A)-A')}$$

$$\leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q-A) = \mu^*(Q).$$

La otra desigualdad vale por sub-aditividad de μ^*

$$\mu^*(Q) \leq \mu^*(Q-(A\cup A')) + \mu^*(Q\cap(A\cup A'))$$

$$\Rightarrow \quad \mu^*(Q) = \mu^*(Q-(A\cup A')) + \mu^*(Q\cap(A\cup A')) \,, \quad \forall Q\subseteq X$$

$$\Rightarrow \quad A\cup A' \in \mathcal{A}^*.$$

$\therefore$ $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones finitas.

<u>Falta</u>:
- $\mathcal{A}^*$ es cerrado bajo uniones numerables. $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^*$ σ-álgebra.
- μ^* es medida en $\mathcal{A}^*$.