Existencia de Medidas:

- Mecanismo para construir medidas:

1) definir μ sobre un conjunto generador S ($\mu|_S$ pre-medida).

2) si μ y S satisfacen las condiciones del T. de Unicidad

$\Rightarrow$ μ se extiende (de forma única) a $\mathcal{A} = \sigma(S)$.

¿es posible? sí

Def: Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es un semi-anillo si:

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A, B \in \mathcal{F}$, entonces existen finitos $S_1, S_2, \dots, S_m \in \mathcal{F}$, disjuntos con $A - B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} S_j$.

$(\mathcal{P}(X), \cap, -)$

$(\mathcal{P}(X), \cap, \Delta)$

Teorema: (Carathéodory).

Sea $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ un semi-anillo y $\mu : S \to [0, +\infty]$ una pre-medida

es

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) si $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq S$ disjuntos, entonces $\mu\left(\dot{\bigcup}_{k\geq 1} A_k\right) = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)$.

Entonces μ posee una extensión a una medida μ en $\sigma(S)$.

Si además, S posee una secuencia exhaustiva $\{S_k\}_{k\geq 1} \subseteq S$, $S_k \nearrow X$ tal que $\mu(S_k) < +\infty, \forall k \in \mathbb{N}$, entonces la extensión μ es única.

Idea de la prueba:

¿Cómo extender la premedida μ a una medida μ en $\sigma(\mathcal{S})$?

Para cada $A \subseteq X$, consideramos la familia de $\mathcal{S}$-coberturas enumerables de A:

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \{S_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{S} : A \subseteq \bigcup_{k\geq 1} S_k \right\}$$

Si A no admite $\mathcal{S}$-coberturas enumerables: $\mathcal{C}(A) = \emptyset$.

Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$.

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) : \{S_k\} \in \mathcal{C}(A) \right\}$$

Obs! Cuando $\mathcal{C}(A) = \emptyset$, $\mu^*(A) = \inf \emptyset = +\infty$.

Paso 1: μ^* es medida exterior:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) σ-subaditiva: $\mu^*\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} \mu^*(A_k)$.

Paso 2: μ^* extiende a μ: $\mu^*\big|_{\mathcal{S}} = \mu$. $\left(\mu^*(S) = \mu(S), \forall S \in \mathcal{S}\right)$

Paso 3: Definir conjuntos μ^*-mesurables:

$$\mathcal{A}^* = \{A \subseteq X : \underline{\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q - A)}, \forall Q \subseteq X\}$$

y mostramos que $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$.

Paso 4: $\mu^*\big|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida en $\mathcal{A}^*$.

Prueba: Definimos $\mu^*: P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ por

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) : \{S_k\} \in \mathcal{C}(A) \right\}$$

y $\mu^*(A) = +\infty$ si A no admite S-coberturas enumerables.

- Paso 1: Afirmamos que μ^* es una medida exterior:

i) Para $A = \emptyset$ consideramos la S-cobertura $\{S_k\}_{k\geq 0}$, con $S_k = \emptyset$

$\Rightarrow A = \emptyset \subseteq \bigcup \emptyset = \bigcup_{k\geq 1} S_k \Rightarrow \{S_k\} \in \mathcal{C}(A)$. y

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum \mu(S_k) : \right\} \leq \sum_{k\geq 1} \mu(\emptyset) = \sum_{k\geq 1} 0 = 0.$$

$\Rightarrow \mu^*(A) = 0$.

ii) Si $A \subseteq B$, cualquier S-cobertura de B es también S-cobertura de A $\Longrightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) = \inf_{\mathcal{C}(A)} \left\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) \right\} \leq \inf_{\mathcal{C}(B)} \left\{ \sum_{k\geq 1} \mu(S_k) \right\} = \mu^*(B).$$

iii) Suponga $\mu(A_k) < +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donde $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{P}(X)$

Fijamos $\varepsilon > 0$. De la definición de ínfimo, para cada A_k, existe una $\mathcal{S}$-cobertura $\{S_n^k\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{S}$ tal que

$$\sum_{n\geq 1} \mu(S_n^k) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

$\Rightarrow$ $\{S_n^k\}_{n,k\geq 1}^{\infty}$ es una $\mathcal{S}$-cobertura de $\bigcup_{k\geq 1} A_k = A$ y

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \mu(S_n^k) \leq \sum_{k\geq 1}\left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k\geq 1}\mu^*(A_k) + \cancelto{\varepsilon}{\sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^k}}$$

$$\leq \sum_{k\geq 1}\mu^*(A_k) + \varepsilon .$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\Big) = \mu^*(A) \leq \sum_{k\geq 1} \mu^*(A_k) .$$

$\therefore$ μ^* es medida exterior.

- <u>Paso 2</u>: μ^* es extensión de μ.

1) Extendemos μ a la familia $S_\cup = \{ S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t : t \in \mathbb{N}, S_j \in \mathcal{S} \}$

por
$$\bar{\mu}(S_1 \cup \dots \cup S_t) = \sum_{j=1}^{t} \mu(S_j).$$

Afirmamos que $\bar{\mu}$ está bien definida: Si
$$S_1 \cup \dots \cup S_m = T_1 \cup \dots \cup T_n, \qquad S_i, T_j \in \mathcal{S}.$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(S_1 \cup \dots \cup S_m) = \bar{\mu}(T_1 \cup \dots \cup T_n).$$