Unicidad de Medidas:

$\mathcal{A} = \sigma(S)$

Para definir una medida en $\mathcal{A}$, basta definirla en el generador S.

extender medida: $A = \biguplus_{n\geq 1} A_n$, $\{A_n\} \subseteq S$, disjuntos

definimos $\mu(A) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Recordatorio: $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{D}$ es sistema Dynkin ó λ-sistema si:

i) $\emptyset \in \mathcal{D}$

ii) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

iii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{D}$, disjuntos a pares $\Rightarrow \biguplus_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{D}$.

Prop: • $\delta(S)$ = menor λ-sistema que contiene a S

• $\mathcal{D}$ Dynkin, $\mathcal{D}$ es σ-alg. $\Longleftrightarrow$ $D, E \in \mathcal{D} \Rightarrow D \cap E \in \mathcal{D}$.

Prop: Si $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ es estable bajo intersecciones finitas $(D, E \in S \Rightarrow D \cap E \in S)$

Entonces $\delta(S) = \sigma(S)$.

Prueba: (Ver Cap 5 de Schilling).

Teorema: (Unicidad de Medidas).

Sea $(X,\mathcal{A})$ espacio mesurable, y suponga que $\mathcal{A}=\sigma(S)$, es generada por una familia $S\subseteq\mathcal{P}(X)$, tal que

i) S es estable bajo intersecciones finitas;

ii) existe una secuencia exhaustiva ($\{G_n\}_{n\geq 1}\subseteq S$ con $G_n\nearrow X$).

Si μ y ν son dos medidas que coinciden en S ($\mu(A)=\nu(A)$, $\forall A\in S$) y son finitas para todo miembro de la secuencia exhaustiva ($\mu(G_n)=\nu(G_n)<+\infty$, $\forall n$), entonces $\mu=\nu$ en $\mathcal{A}$.

Prueba: Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{D}_n=\{A\in\mathcal{A}:\ \mu(A\cap G_n)=\nu(A\cap G_n)\}$$

Afirmamos que $\mathcal{D}_n$ es un sistema Dynkin:

i) $\emptyset \cap G_n = \emptyset$ y $\mu(\emptyset \cap G_n) = 0 = \nu(\emptyset \cap G_n) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{D}_n$.

ii) Si $A \in \mathcal{D}_n \Rightarrow \mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n)$. Luego,

$$\mu(A^c \cap G_n) = \mu(G_n - A) = \mu[G_n - (G_n \cap A)] = \mu(G_n) - \mu(G_n \cap A)$$
$$= \nu(G_n) - \nu(G_n \cap A) = \nu(G_n - A) = \nu(A^c \cap G_n)$$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_n$.

iii) $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{D}_n$, disjuntos $\Rightarrow \mu(A_k \cap G_n) = \nu(A_k \cap G_n)$, $\forall k$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k \cap G_n\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} \underbrace{(A_k \cap G_n)}_{\text{disjuntos}}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap G_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \cap G_n) = \nu\Big(\dot{\bigcup_{k\geq 1}} (A_k \cap G_n)\Big)$$
$$= \nu\Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k \cap G_n\Big)$$

$\Rightarrow \dot{\bigcup_{k\geq 1}} A_k \in \mathcal{D}_n$.

Como S es estable bajo intersecciones finitas, por la proposición anterior $\Rightarrow$ $\delta(S) = \sigma(S)$. Además

$$S \subseteq \mathcal{D}_n, \forall n \Rightarrow \sigma(S) = \delta(S) \subseteq \mathcal{D}_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, $\mathcal{A} = \sigma(S) \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}_n = \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$. En particular, $\forall A \in \mathcal{A}$ vale

$$\mu(A \cap G_n) = \nu(A \cap G_n), \quad \forall n.$$

Como $G_n \nearrow X \Rightarrow A \cap G_n \nearrow A \cap X = A$. Por continuidad inferior de μ y ν:

$$\mu(A) = \mu(\lim_n A \cap G_n) = \lim_n \mu(A \cap G_n) = \lim_n \nu(A \cap G_n)$$

$$= \nu(\lim_n A \cap G_n) = \nu(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

$\therefore$ $\mu \equiv \nu$ en $\mathcal{A}$. $\square$

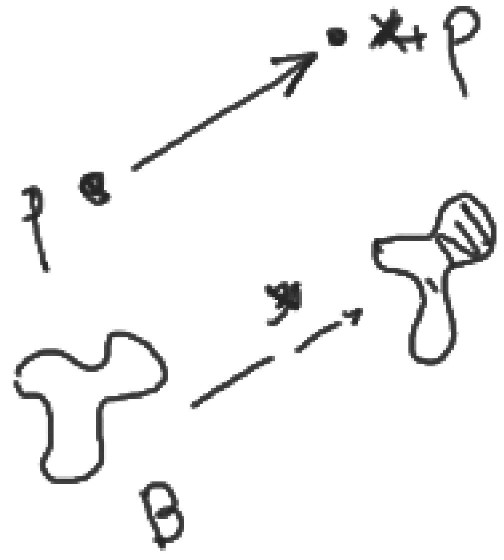
Aplicación:

¿ por qué la medida de Lebesgue es importante ?

Teorema: (i) La medida de Lebesgue n-dimensional λ^n es invariante por traslaciones

$$\lambda^n(x+B) = \lambda^n(B)$$

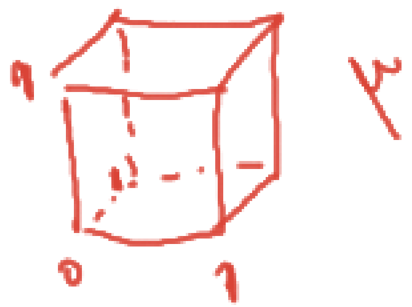
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.



(ii) Toda medida μ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ que es invariante bajo traslaciones es de la forma

$$\mu = k\lambda^n$$

donde $k = \mu([0,1)^n)$. y $k < \infty$.



Prueba: Primero observe que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $x+B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Sea $\mathcal{A}_x = \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : x + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \}$. Obj: $\mathcal{A}_x = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{A}_x$ es σ-álgebra:

i) $x + \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_x$.

ii) $A \in \mathcal{A}_x \Rightarrow x + A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (x+A)^c = x + A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_x$.

iii) $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{A}_x \Rightarrow x + A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \bigcup_{k\geq 1} (x + A_k) = x + \bigcup_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow \bigcup_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{A}_x$.

Además, los rectángulos $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) : a_i < b_i \}$ están en $\mathcal{A}_x$, pues si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces

$$\underline{x + \prod_{i=1}^n [a_i, b_i)} = \prod_{i=1}^n \underline{[x_i + a_i, x_i + b_i)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}_x.$$

$$\text{y} \quad \lambda^n\left(x + \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (\cancel{x_i} + b_i - (\cancel{x_i} + a_i)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \lambda^n\left(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i) \right)$$

$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}_x \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, $\mathcal{A}_x = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

En particular $x+B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (traslaciones de borel son borel.

i) Definimos $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ por

$$\nu(B) = \lambda^n(x+B).$$

Afirmamos que ν es medida:

i) $\nu \geq 0$, pues $\lambda^n \geq 0$ /

ii) $\nu(\emptyset) = \lambda^n(x+\emptyset) = \lambda^n(\emptyset) = 0$. /

iii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, disjuntos, entonces

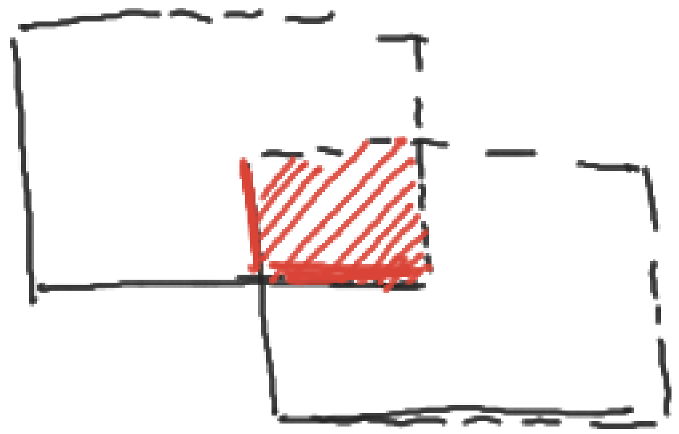
$$\nu\Big(\dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n\Big) = \lambda^n\Big(x + \dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n\Big) = \lambda^n\Big(\dot{\bigcup_{n\geq 1}} (x+A_n)\Big) \quad /$$
$$= \sum_{n\geq 1} \lambda^n(x+A_n) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n).$$

Para un intervalo $I \in \mathcal{J}$, $\quad I = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ vale

$$v(I) = \lambda^n(x+I) = \lambda^n(I), \quad \forall \text{ intervalo } I \in \mathcal{J}.$$

Observe:

i) $\displaystyle \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \cap \prod_{i=1}^{n} [c_i, d_i) = \prod_{i=1}^{n} \left[\max(a_i, c_i), \min(b_i, d_i) \right)$



$\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ es estable por intersecciones finitas

ii) $\displaystyle \left\{ \prod_{i=1}^{n} [-k, k) \right\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia exhaustiva de intervalos en $\mathcal{J}$ y

$$\lambda^n\left(\prod_{i=1}^{n} [-k, k) \right) = (2k)^n < \infty.$$

Por el Teorema de unicidad, como $\nu = \lambda^n$ en $\mathcal{J}$,

entonces $\nu \equiv \lambda^n$ en $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Así

$$\underline{\lambda^n(x+B) = \lambda^n(B)}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

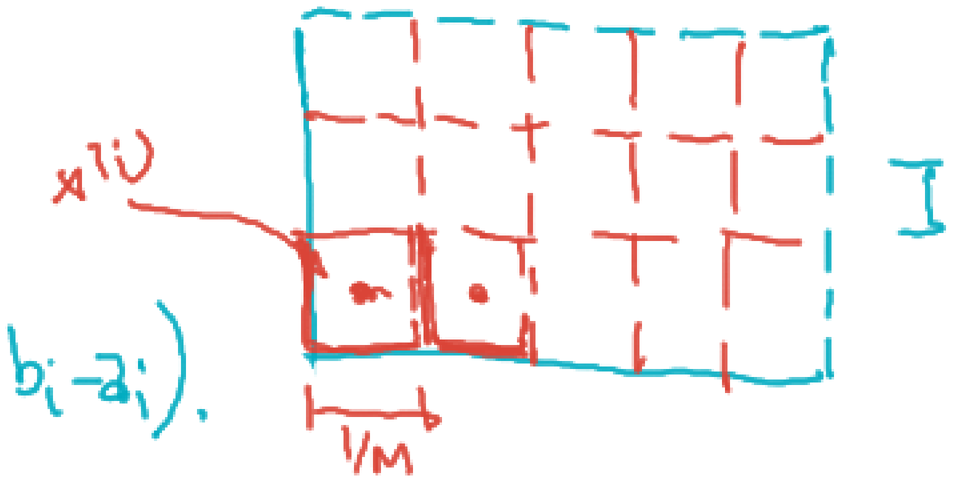
ii) Sea μ una medida en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ invariante por traslaciones.

Tomamos $I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, con $a_i, b_i \in \mathbb{Q}^n$ $\Rightarrow$ $I \in \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$

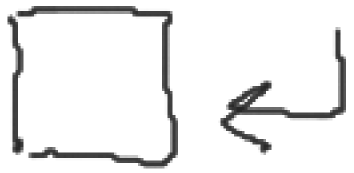
Existen $M \in \mathbb{N}$, $k(I) \in \mathbb{N}$ y puntos $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$I = \biguplus_{i=1}^{k(I)} \left(x^{(i)} + [0, \tfrac{1}{M})^n \right)$$

(basta elegir M el denom. común de los $b_i - a_i$).



$[0, 1/M)^n$



$$\lambda^n [0, 1/M)^n = \left(\frac{1}{M}\right)^n$$

Usando la invarianza por traslación de μ y de λ^n:

$$\mu(I) = K(I)\cdot \mu\left([0,1/M)^n\right), \qquad \mu\left([0,1]^n\right) = M^n \mu\left([0,1/M)^n\right)$$

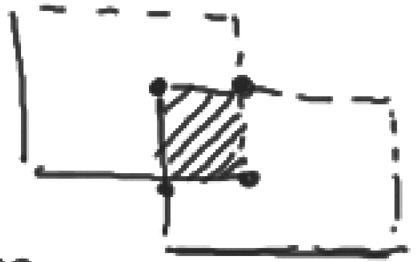
$$\lambda^n(I) = K(I)\cdot \lambda^n\left([0,1/M)^n\right), \qquad \underbrace{\lambda^n\left(\cancel{[0,1]^n}\right)}_{1} = M^n \lambda^n\left([0,1/M)^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(I) = \frac{K(I)}{M^n}\,\mu\left([0,1)^n\right) \quad \text{y} \quad \lambda^n(I) = \frac{K(I)}{M^n}\cdot 1 = \frac{K(I)}{M^n}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(I) = \underbrace{\mu\left([0,1)^n\right)}_{K}\cdot \lambda^n(I) = K\lambda^n(I) \quad \forall I \in J_Q.$$

Pero, $\sigma(J_Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. (nos gustaría usar T. Unicidad J_Q)

(i) J_Q es cerrada bajo intersecciones finitas



$$A, B \in J_Q \Rightarrow A \cap B \in J_Q.$$

(ii) $\left\{ \prod_{i=1}^{n} [-k,k) \right\}_{k\geq 1}$ es una sec. exhaustiva en J_Q, con $\lambda^n = (2k)^n$.

Aplicando el Teorema de Unicidad, entonces

$$\mu = k\lambda^n \text{ en } J_Q \implies \mu = k\lambda^n \text{ en } \sigma(J_Q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto μ es múltiplo de la medida de Lebesgue. $\square$.