Ejemplos de Medidas:

1. Medidas Triviales:

medida nula $\quad \mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = 0, \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \mu(\emptyset) = 0 \\ \text{ii) si } \{A_n\}_n \subseteq \mathcal{A} \text{ disjuntos} \Rightarrow \mu(A_n) = 0, \ \forall n \text{ y} \\ \qquad \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = 0 = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n). \end{array}\right\} \Rightarrow \mu \text{ es medida.}$$

medida infinita: $\quad \mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A = \emptyset \\ +\infty; & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, A_n disjuntos a pares.

- Si $A_n = \emptyset, \forall n \Rightarrow \mu(A_n) = 0, \forall n$ y $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \emptyset = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = 0 = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

- Caso contrario, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $A_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow \mu(A_{n_0}) = +\infty$

$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \supseteq A_{n_0} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \neq \emptyset \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = +\infty$

y $$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = +\infty = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

(2.) La medida de Dirac o masa unitaria:

$(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable, y sea $x \in X$. Definimos la función $\delta_x : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$ por

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0; & x \notin A \\ 1; & x \in A. \end{cases}$$

δ_x es una medida:

i) $\delta_x(\emptyset) = \mathbb{1}[x \in \emptyset] = 0.$

ii) Sea $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, disjuntos a pares.

- Si $x \in A_n$, para algún $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta_x(A_n) = 1$ y $\delta_x(A_m) = 0$, $\forall m \neq n$. Además $x \in A_n \Rightarrow x \in \bigcup_{k \geq 1} A_k$.

$$\Rightarrow \delta_x\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = 1 = \sum_{k \geq 1} \delta_x(A_k).$$

- Caso contrario, $x \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y $x \notin \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Luego

$$\delta_x\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = 0 = \sum_{n\geq 1} \delta_x(A_n).$$

Obs! En física se usa $\delta_x(A) = \begin{cases} 0; & x \notin A \\ +\infty; & x \in A. \end{cases}$

3. Consideremos la σ-álgebra $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es enumerable ó } A^c \text{ es enumerable}\}$

Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ es enumerable} \\ +\infty; & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(X es no enumerable)

④ La medida de conteo:

Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable. Definimos $|\cdot| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$|A| = \begin{cases} \# A; & A \text{ finito} \\ +\infty; & A \text{ no es finito.} \end{cases}$$

$|\cdot|$ es una medida.

i) $|\emptyset| = \#\emptyset = 0.$

ii) Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, A_n disjuntos a pares

- Si Todos los A_n son finitos $\Rightarrow |A_n| = \# A_n$ y

$$\left|\bigcup_{n\geq 1} A_n\right| = \#\bigcup_{n\geq 1} A_n = \sum_{n\geq 1} |A_n|.$$

- Si algun A_n es infinito, también lo es $\bigcup_{n\geq 1} A_n$. luego

$$\left|\bigcup_{n\geq 1} A_n\right| = +\infty = \sum |A_n|.$$

5. Espacios de probabilidad discreta:

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ un conjunto enumerable y $\{p_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $0 \leq p_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 1}^{\infty} p_n = 1$.

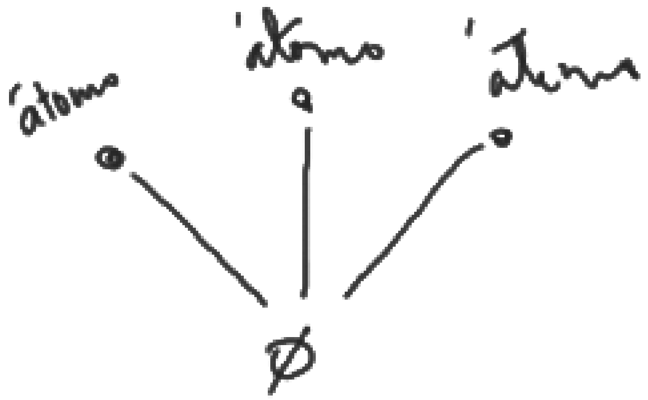
En $(\Omega, \underbrace{\mathcal{P}(\Omega)}_{\sigma\text{-alg.}})$ definimos la función $\mathbb{P}: \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n:\, \omega_n \in A} p_n = \underline{\sum_{n\geq 1}^{\infty} p_n \mathbb{1}_A(\omega_n)}$$

$\mathbb{P}$ define una medida de probabilidad. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ se llama un espacio de probabilidad (discreto), pues

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega_n \in \Omega} p_n = \sum_{n\geq 1}^{\infty} p_n = 1.$$

Def: Si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra sobre X, un átomo de $\mathcal{A}$ es cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que si $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{A}$ entonces $B = \emptyset$ ó $B = A$.



Recordamos que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

¿Cuáles son los átomos? $\{\omega_i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

$\|$ eventos simples (conj. unitarios)

$\mathbb{P}(\omega_n) = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

σ-aditividad

y en general

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\omega_n \in A} \{\omega_n\}\Big) = \sum_{\omega_n \in A} \mathbb{P}(\omega_n).$$

Lema 1: Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mensurable, y sea $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ una función aditiva, con $\mu(\emptyset) = 0$. Entonces, μ es medida $\iff$ μ es continua inferior (i.e. $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, $A_n \nearrow A$, entonces $\mu(A) = \sup_n \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$).

Prueba: $(\Rightarrow)$ Toda medida μ es continua inferior (prop. 6).

$(\Leftarrow)$ Si μ es aditiva y continua inferior. Tome $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ con B_n disjuntos a pares. Definimos

finitas

$$\underline{A_n = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

- $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$ (pues son uniones finitas de elementos en $\mathcal{A}$).
- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$
- $\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n\geq 1}^{\infty} B_n$.

Como μ es continua inferior $\Rightarrow$ $\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

En consecuencia

$$\mu\left(\biguplus_{n\geq 1} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n). \qquad \square$$

μ aditiva

<u>Lema 2</u>: Sea $(X, \mathcal{A})$ espacio mesurable y $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ una función aditiva, con $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(A) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Entonces μ es medida $\Leftrightarrow$ vale alguna de las siguientes

i) μ continua inferior

ii) μ " superior

iii) μ " en $\emptyset$ (i.e. $B_n \searrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$)

Prueba: $(\Rightarrow)$ Si μ es medida sabemos que valen (i), (ii) y (iii)

(Propiedades 6 y 7 clase anterior).

$(\Leftarrow)$ En la prueba de las propiedades, vimos que $(6) \Rightarrow (7)$, esto (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Bastaría mostrar que (iii) $\Rightarrow$ (σ-aditiva).

$\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, A_n disjuntos, $A = \dot{\bigcup\limits_{n \geq 1}} A_n$. Como

$$B_n = A - (A_1 \cup \dots \cup A_n) \searrow \emptyset.$$

Por (iii)

$$0 = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = \mu(A) - \lim_{n \to \infty} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A) - \lim_{n \to \infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n \right) = \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

$\square$