Medidas:

Ej: medida de Lebesgue $\quad |A|_e = \inf\left\{ \sum_k |I_k|_e : \{I_k\} \text{ es cobertura de } A \right\}$

luego $|A| = |A|_e$ si $\forall \varepsilon \; \exists \, G$ abierto con $A \subseteq G$ y

$$|G - A|_e = 0.$$

- $|A| \geq 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- $\left| \bigcup_{n\geq 1} A_n \right| \leq \sum_{n\geq 1} |A_n| \quad$ y $\quad \left| \dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n \right| = \sum_{n\geq 1} |A_n|.$

Def: Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X. Una <u>medida</u> (positiva) es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, y que satisface

i) $\mu(\emptyset) = 0$. $\qquad$ ii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$, disjuntos a pares entonces $\quad \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad$ (σ-aditiva).

Obs! • si valen (i) y (ii) pero $\mathcal{A}$ no es σ-álgebra, entonces μ se llama una pre-medida.

• (ii) se requiere que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ (claramente si $\mathcal{A}$ es σ-algebra esto vale). En el caso de pre-medidas, requiere más cuidado.

Antes de calcular $\mu(B)$, asegurarse que $B \in \mathcal{A}$.

Notación: $A_n \nearrow A$ significa $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ y $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \lim_n A_n$

$B_n \searrow B$ significa $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ y $B = \bigcap_{n\geq 1} B_n = \lim_n B_n$.

<u>Def</u>: Sea X conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. El par $(X, \mathcal{A})$ se llama un <u>espacio</u> <u>mesurable</u> (<u>medible</u>).

Si μ es una medida en X, la estructura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama un <u>espacio</u> <u>de medida</u>.

Una <u>medida</u> <u>finita</u> es aquella donde $\mu(X) < \infty$ (a veces se llama también <u>medida</u> <u>compacta</u>).

Una <u>medida de probabilidad</u> es aquella donde $\mu(X) = 1$.

En ese caso $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama un <u>espacio de probabilidad</u>

(<u>Obs</u>! usamos $\mathbb{P}$ en lugar de μ).

Def: Una medida μ es <u>σ-finita</u> si $\mathcal{A}$ contiene una secuencia $\{A_n\}_{n\geq 1}$ tal que $A_n \nearrow X$ y $\mu(A_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Propiedades</u>: (Propiedades básicas de medidas). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $A, B, A_n, B_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$.

1) (aditividad) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2) (monótona) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

3) (diferencia) Si $A \subseteq B$ y $\mu(B) < \infty \Rightarrow \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

4) (principio inclusión-exclusión) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

5) (sub-aditividad) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

6) (continuidad inferior)

Si $A_n \nearrow A \Rightarrow \mu(A) = \sup_{n\geq 1} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

7) (continuidad superior)

Si $B_n \searrow B$ y $\mu(B_1)<\infty \Rightarrow \mu(B) = \inf_{n\geq 1} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$

$\mu\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) \qquad A_n \nearrow$

"μ continua"

$\mu\left(\lim_n B_n\right) = \lim_n \mu(B_n) \qquad B_n \searrow$

8) (σ-subaditividad) $\quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$

<u>Prueba:</u> (1) Hacemos $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$. Entonces $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ y los A_n son disjuntos a pares

$$\mu(A \cup B) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n\geq 1}} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B).$$

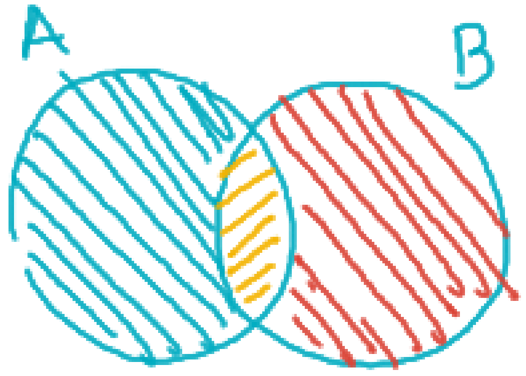
(2) $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B-A)$ unión disjunta

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B-A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

(3) De (2) como $\mu(B) < \infty$ y $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\mu(A)} < \infty$ y la restamos en ambos lados

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B-A).$$

(4) Para todo $A, B \in \mathcal{A}$ $\cancel{(A\cup B) - (A\cap B) = A \cup [B - (A\cap B)]}$



Escribimos $A\cup B = [A-(A\cap B)] \,\dot\cup\, [B-(A\cap B)] \,\dot\cup\, (A\cap B)$

$$\Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A-(A\cap B)) + \mu(B-(A\cap B)) + \mu(A\cap B)$$

$$= \mu(A) - \cancel{\mu(A\cap B)} + \mu(B) - \mu(A\cap B) + \cancel{\mu(A\cap B)}$$

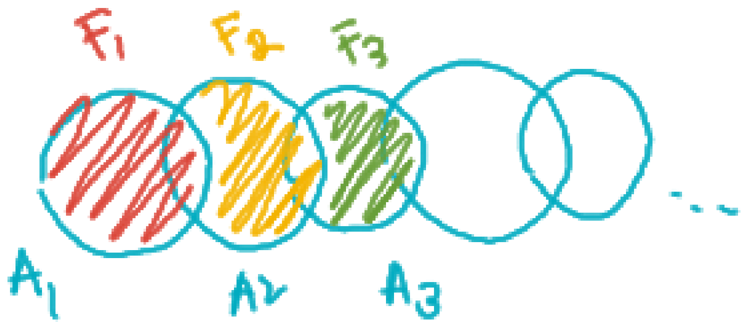
$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A\cap B).$$

(5) De (4): $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)-\underbrace{\mu(A\cap B)}_{\geq 0} \leq \mu(A)+\mu(B).$

Por inducción: $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

(6) Tomemos $F_1 = A_1$, $F_2 = A_2 - A_1$, $F_3 = A_3 - A_2$, ... $F_n = A_n - A_{n-1}$.

Los $F_n \in \mathcal{A}, \forall n$ y



los F_n son disjuntos a pares

$$y \quad \dot{\bigcup_{n\geq 1}} F_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad y \quad \dot{\bigcup_{n=1}^{k}} F_n = \bigcup_{n=1}^{m} A_n, \forall k \qquad A_n \nearrow A$$

$$\underline{\mu(A)} = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \underline{\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\geq 1}} F_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(F_n)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{k}} F_n\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{k} A_n}\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(\underline{A_k})$$

$$\mu\Big(\lim_{k\to\infty} A_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(7) $B_n \searrow B$ y $\mu(B_1) < \infty$. $\Rightarrow$ $B_1 - B_n \nearrow B_1 - B$. De (6)

$$\cancel{\mu(B_1)} - \mu(B) = \mu(B_1 - B) = \mu\Big(\lim_{n\to\infty}(B_1 - B_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 - B_n)$$

$$= \lim_{n\to} \big[\mu(B_1) - \mu(B_n)\big] = \cancel{\mu(B_1)} - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\lim B_n) = \lim \mu(B_n).$$

(8) Usamos la sub-aditividad.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\lim_{k\to\infty} \bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

$\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$