σ-álgebras:

Def: Una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en un conjunto X es una familia de subconjuntos de X que satisface

i) $X \in \mathcal{A}$.

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X - A \in \mathcal{A}$.

iii) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman conjuntos $\mathcal{A}$-medibles.

Propiedades: Si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra en X:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ $\qquad [X \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = X^c \in \mathcal{A}]$

2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$[A_1 = A,\ A_2 = B$ y $A_n = \emptyset,\ \forall n \geq 3.\quad A_n \in \mathcal{A}, \forall n \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}]$

3) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

$\left[\ A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{A},\ \forall n \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \bigcup_{n\geq 1} A_n^c \in \mathcal{A} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}\right.$

4) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

5) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$ $\quad [\ A - B = A \cap B^c \in \mathcal{A}\ ]$.

Ejemplos: (1.) $2^X = \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra en X;
(es la σ-álgebra maximal en X)

(2.) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ es σ-álgebra en X (es la σ-álgebra minimal)

(3.) Sea $A \subseteq X$ con $\emptyset \neq A \neq X$. Entonces
$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ es una σ-álgebra.
$\mathcal{B} = \{\emptyset, A, X\}$ no es sigma álgebra. (no cumple (ii)).

(4.) Se puede demostrar que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra finita en X

$\Rightarrow |\mathcal{A}| = 2^n$. ($\mathcal{A}$ es una álg. booleana).

(5.) $\mathcal{A} = \{ A \subseteq X : A$ es enumerable ó A^c es enumerable$\}$

A enumerable $\Updownarrow$ $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

$\mathcal{A}$ es σ-álgebra en X.

<u>Prueba</u>: (i) $X \in \mathcal{A}$, pues $X^c = \emptyset$ es enumerable.

(ii) Si $A \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ A es enumerable ó A^c es enumerable

$\Rightarrow (A^c)^c$ " ó A^c "

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$. Tenemos dos casos

- Si todo A_n es enumerable, $\forall n$ $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es enumerable por ser unión enumerable de conjuntos enumerables. $\Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

- Si algún A_n no es enumerable $\Rightarrow$ A_n^c es enumerable, y

$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c$ es enumerable (pues $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^c \subseteq A_n^c \Rightarrow \left|\bigcap_{j\geq 1} A_j^c\right| \leq |A_n^c| \leq |\mathbb{N}|$)

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$ $\square$

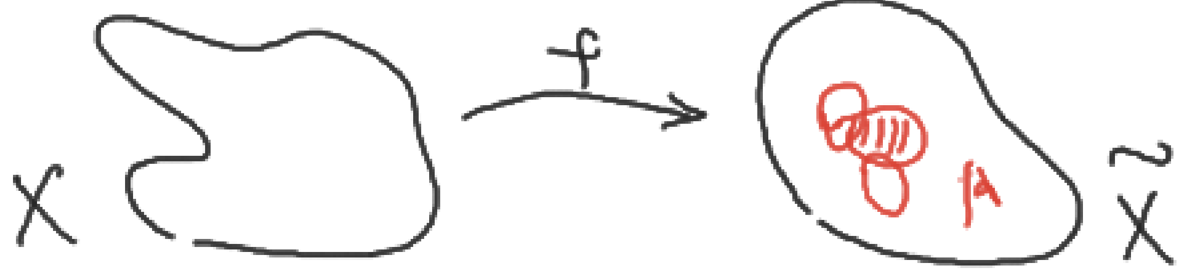
<u>Formas de construir nuevas σ-álgebras:</u>

- <u>Traza</u>: Sea $E \subseteq X$ y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. Entonces

$$\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \cap E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}_E$ es una σ-álgebra en E. ($\mathcal{A}_E$ es la traza de $\mathcal{A}$ en E).

- <u>Preimagen</u>: Sea $f: X \to \tilde{X}$ una función. Sea $\mathcal{A}$ una σ-alg. en $\tilde{X}$.



$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{ f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

pullback de $\mathcal{A}$ por f

$f^{-1}(\mathcal{A})$ es una σ-álgebra en X.

Prueba: Ejercicio!

Teorema: 1) La intersección arbitraria $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ de cualquier familia $\{\mathcal{A}_i\}$ de σ-álgebras en X, es de nuevo una σ-álgebra en X.

2) Para cualquier colección S de subconjuntos de X, existe una σ-álgebra $\sigma(S)$ en X tal que: $S \subseteq \sigma(S)$

si $\mathcal{G}$ es σ-alg. y $S \subseteq \mathcal{G} \implies \sigma(S) \subseteq \mathcal{G}$.

Prueba: (1) Sean $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in J}$ σ-álgebras en X.

i) $X \in \mathcal{A}_i, \forall i \in J \Rightarrow X \in \bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i$.

ii) $A \in \bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i, \forall i$ y como $\mathcal{A}_i$ es σ-alg. $\rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i, \forall i$

$$\Rightarrow A^c \in \bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i.$$

iii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i \Rightarrow \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}_i, \forall i \in J \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i, \forall i$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i \in J} \mathcal{A}_i.$$

(2) Tome S colección de subconjuntos en X. Consideramos la familia

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ es } \sigma\text{-alg. en } X \text{ y } S \subseteq \mathcal{H}.\}$$

de todas las σ-alg. que contienen al S.

$\mathcal{F}$ es no vacía, pues $\mathcal{P}(X)$ es σ-alg. y $S \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow \mathcal{P}(X) \in \mathcal{F}$.

De (1), $\underline{\sigma(S) = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{F}} \mathcal{H}}$. $\Rightarrow \sigma(S)$ es $\underline{\sigma\text{-álgebra}}$; y

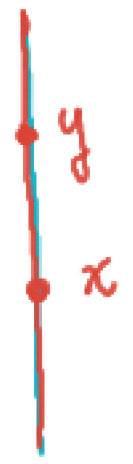
$$S \subseteq \mathcal{H}, \forall \mathcal{H} \in \mathcal{F} \Rightarrow \underline{S \subseteq} \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{F}} \mathcal{H} = \sigma(S).$$

Si $\mathcal{G}$ es otra σ-alg. con $S \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathcal{F}$. En particular

$$\sigma(S) = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{F}} \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}. \quad \square$$

Obs! Las σ-álgebras en X forman un retículo

$(\mathbb{R}, \leq)$

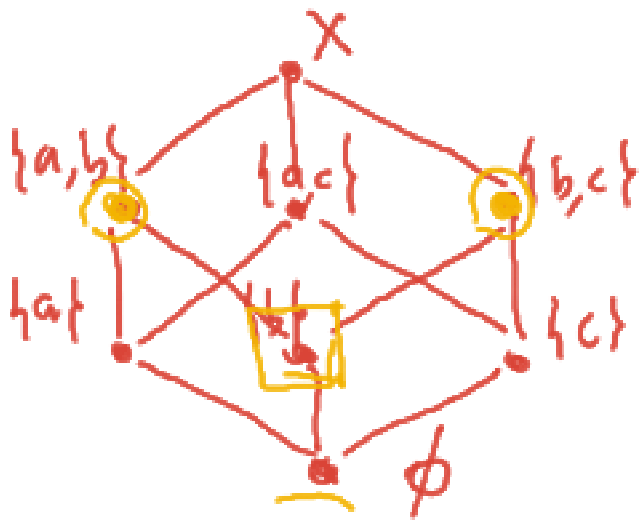


$x \leq y$

$\min(x,y) = x$

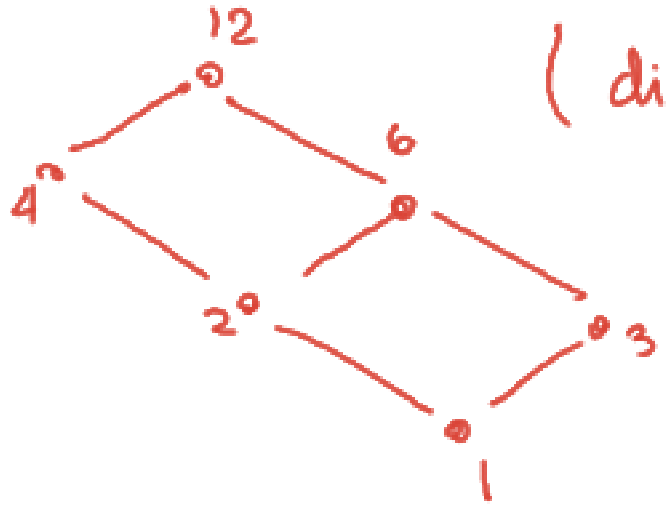
$\max(x,y) = y$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ $\quad X = \{a,b,c\}$



$\{a,b\} \cup \{b,c\}$

$\{a,b\} \cap \{b,c\}$

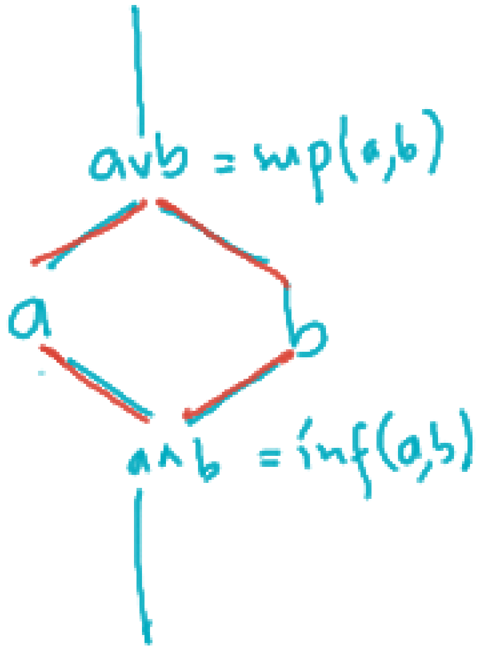


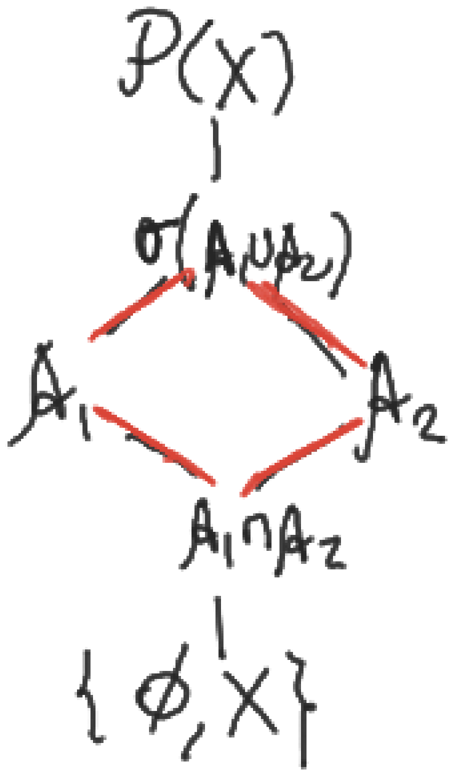
$(\mathrm{div}\,12, \mid)$

$a \vee b = \mathrm{mmc}(a,b)$

$a \wedge b = \mathrm{mdc}(a,b)$

Obs: La colección de σ-álg. en X forma un retículo





$\cancel{A_1 \cup A_2}$ no neces. es σ-alg.

$\inf = A_1 \cap A_2$

$\sup = \sigma(A_1 \cup A_2)$

$\sigma(S)$ se llama la <u>σ-álgebra generada</u> por S, y en ese caso S es un <u>generador</u> para $\sigma(S)$.

Prop:

- Si S es σ-álgebra $\Rightarrow \sigma(S) = S$.
- Si $S \subseteq T \Rightarrow \sigma(S) \subseteq \sigma(T)$.
- $\sigma(\sigma(S)) = \sigma(S)$

- $A \subseteq X \Rightarrow$ $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

Recordemos la σ-álgebra de Borel.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) = \{$ abiertos de $\mathbb{R}^n\}$ (en la topología usual)

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \{$ cerrados de $\mathbb{R}^n\}$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \{$ compactos en $\mathbb{R}^n\}$

Vimos que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma\big(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\big)$

<u>Teorema</u>: $\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$. $\square$