Caracterizaciones de mesurabilidad:

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G$ abierto con $E \subseteq G$ y $|G - E|_e < \varepsilon$.
- " $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F$ cerrado con $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.
- i) E mesurable $\iff$ $E = H - Z$, donde H es G_δ y $|Z| = 0$.

  ii) " $\iff$ $E = H \cup Z$, donde H es F_σ y $|Z| = 0$.
- $|E|_e < \infty$. E mesurable $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $E = (S \cup N_1) - N_2$, donde S es unión finita de intervalos no traslapados y $|N_1|_e, |N_2|_e < \varepsilon$.
- Teorema (de Carathéodory):

  E mesurable $\iff$ para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vale
  $$|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e .$$

Prueba: $(\Rightarrow)$ Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sea H de tipo G_δ tal que $A \subseteq H$ y $|A|_e = |H|$. Observe que H es mesurable.

Como $H = (H \cap E) \cup (H \cap E^c) = (H \cap E) \cup (H - E)$, entonces

$$|A|_e = |H| = \underset{\cup\!\mid}{|H \cap E|} + \underset{\cup\!\mid}{|H - E|}.$$

$$\geq |A \cap E|_e + |A - E|_e$$

Por otro lado, $|A|_e \leq |A \cap E|_e + |A - E|_e$. (ya que $A \cap E$ y $A - E$ cubren A).

$(\Leftarrow)$ Suponga ahora que $|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e$, $\forall A$.

- Si $|E|_e < \infty$, elegimos H de tipo G_δ tal que $E \subseteq H$ y $|E|_e = |H|$.

En particular

$$\cancel{|E|_e} = |H| = \cancel{|H \cap E|_e} + |H - E|_e$$

$\Rightarrow |H - E|_e = 0 \Rightarrow H - E$ es mesurable $\Rightarrow E = \overset{\text{mes.}}{H} - \overset{\text{mes.}}{(H - E)}$

$\Rightarrow E$ es mesurable.

- $|E|_e = +\infty$. Definimos $E_k = \overline{D}_k(0) \cap E$ y

$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \cdots$ Claramente $E = \bigcup_{k\geq 1} E_k$.

Tome H_k de tipo G_δ tales que $E_k \subseteq H_k$ y $|E_k|_e = |H_k|$.

Por hipótesis $\cancel{|E_k|_e} = |H_k| = |\underbrace{H_k \cap E}_{\supseteq E_k}|_e + |H_k - E|_e \geq \cancel{|E_k|_e} + |H_k - E|_e$

$\Rightarrow |H_k - E| = 0 \Rightarrow H_k - E$ mesurable, $\forall k$. Tomemos $H = \bigcup_{k\geq 1} H_k$

$\Rightarrow H$ es mesurable (unión enum. de mesurables), y $E \subseteq H$.

$H - E = \bigcup_k H_k - E = \bigcup_k (H_k - E)$ es mesurable.

Finalmente $E = H - (H - E)$ es mesurable. $\square$

Cor: Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable y $E \subseteq A$, entonces $|A|_e = |\overset{E}{\cancel{A \cap}} E|_e + |A - E|_e$,

En particular, si $|E| < \infty \Rightarrow |A - E|_e = |A|_e - |E|$. $\square$

Transformaciones:

Nos interesa conocer para cuales funciones $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservan conjuntos mesurables:

$$E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mesurable} \Rightarrow T(E) \text{ mesurable.}$$

Def: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación Lipschitz si existe $c>0$ tal que $|T(x)-T(y)| \leq c|x-y|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

$$c = \sup_{x \neq y} \frac{|T(x)-T(y)|}{|x-y|}$$ la constante de Lipschitz de T.

Ejemplo:

- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es transf. lineal $\Rightarrow T$ es Lipschitz.
- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable con derivadas parciales acotadas $\left|\frac{\partial T}{\partial x_i}(x)\right| \leq c, \ \forall x, \forall i \Rightarrow T$ es Lipschitz.

Teorema: Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lipschitz, entonces T mapea conjuntos mesurables en conjuntos mesurables.

Prueba: 1) Mostramos que cualquier función contínua mapea conjuntos F_σ en conjuntos F_σ:

T contínua, mapea compactos en compactos. Como todo cerrado en $\mathbb{R}^n$ es unión enumerable de compactos

$\left(K = \bigcup_{n \geq 1} K_n, \text{ donde } K_n = \overline{D_n(0)} \cap K \right)$.

$K = \bigcup_{n \geq 1} K_n \Rightarrow K$ es de tipo F_σ. Luego,

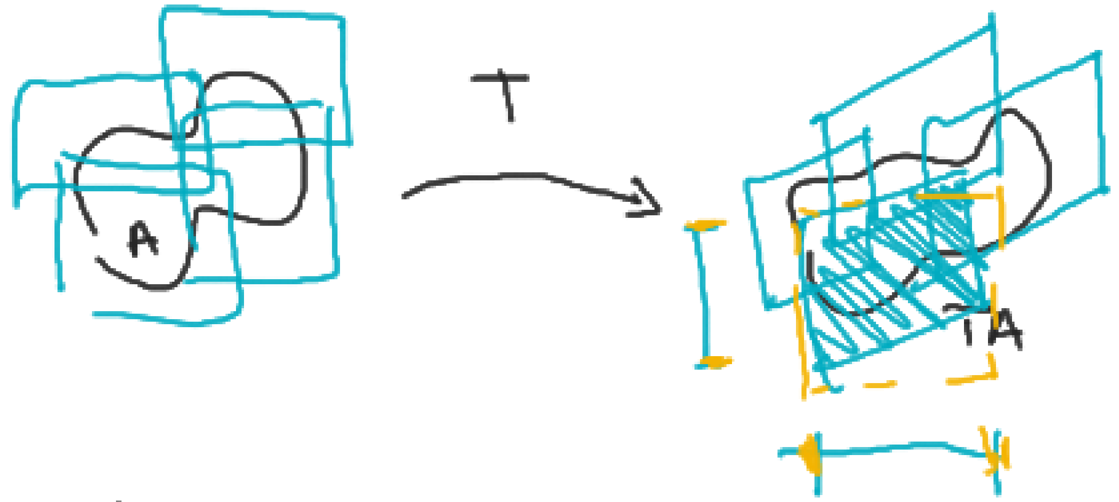
$T(K) = T\left(\bigcup_{n\geq 1} K_n\right) = \bigcup_{n\geq 1} T(K_n)$ es de tipo F_σ. $\Rightarrow T$ mapea cerrados en F_σ. $\Rightarrow T$ mapea F_σ en F_σ.

2) Mostramos que si T es Lipschitz, T mapea conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero:

De $|Tx-Ty| \leq c|x-y|$. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene diámetro $\operatorname{diam}(A) = d$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(T(A)) = \sup_{u,v \in T(A)} |u-v| = \sup_{x,y \in A} |Tx-Ty| \leq \sup_{x,y\in A} c \cdot |x-y|$$

$$\leq c \cdot \operatorname{diam}(A) = c \cdot d.$$



$$|TI| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leq (b_j - a_j)^n$$

$$\leq \tilde{c} \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Si $|A|_e = 0$, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\{I_k\}$ una cobertura por intervalos de A con $\sum |I_k| < \varepsilon \Rightarrow T(A) \subseteq \bigcup T I_k$ y $\sum |T I_k| < \tilde{c}\varepsilon$.

$\Rightarrow |T(A)|_e = 0$.

3) Si E es mesurable $\Rightarrow E = H \cup Z$, con H tipo F_σ y $|Z| = 0$.

$\Rightarrow TE = T(H \cup Z) = T(H) \cup T(Z)$. Pero $T(H)$ es F_σ y $|T(Z)| = 0$ por la carac. de mesurabilidad $\Rightarrow TE$ es mesurable. $\square$

Conjuntos no mesurables:

Lema: $E \subseteq \mathbb{R}$ mesurable, con $|E| > 0$. Entonces, el conjunto de diferencias

$$\{x-y : x, y \in E\}$$

contiene un intervalo centrado en el origen. $\square$

Teorema (de Vitali). Existen conjuntos no mesurables.

Prueba: Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$, dada por

$$x \text{ equivalente a } y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

El conjunto cociente es $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, y las clases de equivalencia son de la forma

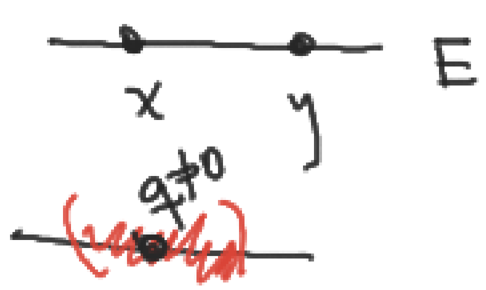
$$E_x = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\} = x + \mathbb{Q}.$$

Como dos clases, o son iguales, o son disjuntas, tenemos

- una clase, es el conjunto $\mathbb{Q}$.
- el resto son clases disjuntas formadas por irracionales.

Además $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es no enumerable $\left(\text{si fuese enumerable } \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q}+x) \text{ sería enum} \right)$

Por el axioma de Zermelo, sea $E \subseteq \mathbb{R}$ formado por un representante de cada clase de equivalencia.



Para $x, y \in E$, $x \neq y \Rightarrow x-y \notin \mathbb{Q}$. En particular $\{x-y : x, y \in E\}$ no contiene intervalos

Conclusión: ó E no es mensurable ó $|E| = 0$.

Pero, $|E| = 0 \Rightarrow |\mathbb{R}| = \left| \bigcup_{x} E_x \right| \leq \sum_{x} |E_x| = \sum_{x} |E+x| = \sum_{x} |E| = 0$

(absurdo). $\therefore$ $|E| > 0$ y E no puede ser mensurable. $\square$