Conjuntos Lebesgue medibles:

1. Todo abierto es medible

2. $|Z|_e = 0 \Rightarrow Z$ es medible

3. Uniones enumerables de medibles son medibles.

4. Intervalos en $\mathbb{R}^n$ son medibles.

5. Cerrados son medibles.

<u>Prueba</u>: Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un cerrado.

- Si F es compacto. Dado $\varepsilon > 0$ tome G abierto con $F \subseteq G$ y $|G| < |F|_e + \varepsilon$. Como $G - F$ es abierto, $G - F = \bigcup_k I_k$ intervalos no traslapados

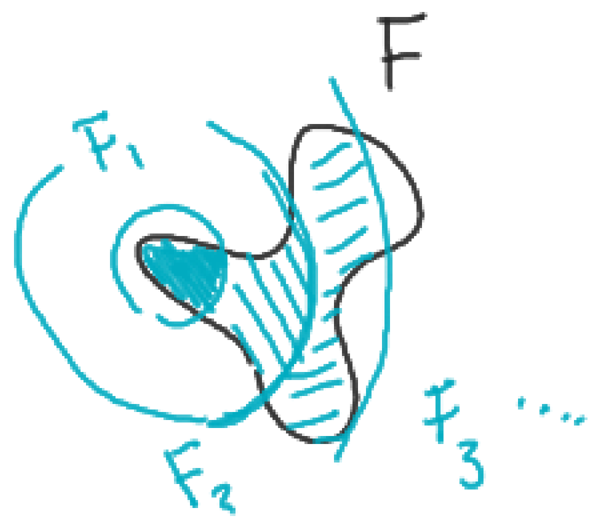
$$|G-F|_e = \left|\bigcup_k I_k\right| \leq \sum_k |I_k|$$

Basta mostrar que $\sum |I_k| < \varepsilon$. Para ello como $G = F \cup \bigcup_{k\geq 1} I_k \supseteq F \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k \Rightarrow |G| \geq \left|F \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right|, \forall n$

Pero F y los I_k son disjuntos

$$\Rightarrow |G| \geq \left|F \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right|_e = |F|_e + \sum_{k=1}^{n} |I_k|_e$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |I_k| = |G| - |F|_e < \varepsilon$$, lo que prueba F mesurable.



- Para el caso general, escribimos $F = \bigcup_{k\geq 1} F_k$, donde $F_k = \overline{D}_k(0) \cap F$.

$\Rightarrow$ F es mesurable (por ser unión enumerable de mesurables). ∎

⑥ Si E es mesurable $\Rightarrow E^c = \mathbb{R}^n - E$ es mesurable

<u>Prueba:</u> Sea E mesurable. Para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$ tomamos G_k abierto tal que $E \subseteq G_k$ y $|G_k - E| < 1/k$.

Tomamos $H = \bigcup_{k\geq 1} G_k^c$. H es mesurable (es unión enumerable de cerrados)

y $E \subseteq G_k, \forall k \Rightarrow G_k^c \subseteq E^c, \forall k \Rightarrow H = \bigcup_{k\geq 1} G_k^c \subseteq E^c$.

Escribimos $E^c = H \cup (E^c - H) = H \cup Z$ $\quad (Z = E^c - H)$.

Observe que $Z = E^c - \bigcup_{k\geq 1} G_k^c \subseteq E^c - G_k^c = E^c \cap G_k = G_k \cap E^c = G_k - E$, $\forall k$

y $|Z|_e \leq |G_k - E| < 1/k$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ $\Rightarrow |Z|_e = 0$

$\Rightarrow Z$ es mesurable $\therefore E^c$ es mesurable. $\square$

(7) Intersección enumerable de mesurables es mesurable.

Prueba: $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k mesurables, $\forall k \Rightarrow E_k^c$ mesurable, $\forall k$.

y $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c$ es mesurable $\Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E$ es mesurable. $\square$

8. E_1, E_2 mesurables $\Rightarrow$ $E_1 - E_2$ es mesurable y $|E_1 - E_2| = |E_1| - |E_2|$.

Def: σ-álgebra en U es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos en U con las propiedades:

i) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$.

ii) $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$.

$\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$.

De las propiedades 1 a 7 tenemos

Teorema: La colección de conjuntos Lebesgue-mesurables en $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra.

Prop: $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ son mesurables. Entonces $\limsup_k E_k$ y $\liminf_k E_k$ son mesurables.

$$\limsup_k E_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k \,, \quad \liminf_k E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} E_k .$$

$\square$

Dada $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos en U, consideramos la familia de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$:

$$\Phi = \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}.$$

Definimos $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \Phi = \bigcap_{\mathcal{F} \in \Phi} \mathcal{F}$. Se puede mostrar que $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra y $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

$\sigma(\mathcal{C})$ es la <u>menor</u> <u>σ-álgebra</u> conteniendo a $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C} = \{ \text{abiertos en } \mathbb{R}^n \}$

<u>Def</u>: La menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ se llama la <u>σ-álgebra de Borel</u> de $\mathbb{R}^n$,

<u>Notación</u>: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se llaman <u>borelianos</u>.

<u>Ejemplos</u>: Todo abierto es boreliano. Todo cerrado es boreliano.

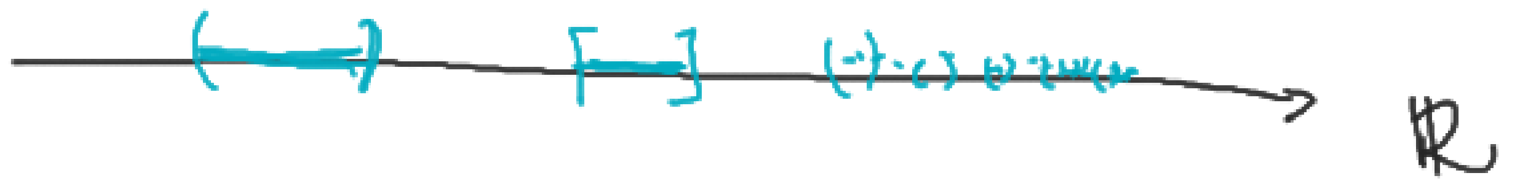
$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ tipo G_δ son borelianos

$G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ...

$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ tipo F_σ son borelianos

$F_{\sigma\delta}$ $F_{\sigma\delta\sigma}$, ...

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq$ mesurables.



$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ colección suficientemente grande

"vamos a poder medir" cualquier boreliano

Teorema: Todo boreliano es mesurable.

Prueba: Sea $\mathfrak{M}$ la colección de los conjuntos Lebesgue mesurables en $\mathbb{R}^n$.

$\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra. Además $\mathfrak{M}$ contiene a todos los abiertos.

($\mathfrak{M}$ es una de las σ-alg. en Φ). Entonces

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigcap \Phi \subseteq \mathfrak{M}.$$

$\square$

Caracterizaciones de Mesurabilidad:

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ G abierto, $G \supseteq E$ y $|G - E|_e < \varepsilon$.

Prop: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ F cerrado, $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.

Prueba: E es mesurable $\iff$ E^c es mesurable

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ G abierto, $G \supseteq E^c$ y $|G - E^c|_e < \varepsilon$

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\cancel{G^c}$ cerrado, $G^c \subseteq E$ y $|G - E^c|_e < \varepsilon$
F

$$|E - F| = |E - G^c| = |E \cap (G^c)^c| = |E \cap G| = |G - E^c|$$

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ F cerrado, $F \subseteq E$ y $|E - F|_e < \varepsilon$.

$\square$

Teorema: i) E mesurable $\iff E = H - Z$, donde H es G_δ y $|Z|=0$.

ii) E mesurable $\iff E = H \cup Z$, donde H es F_σ y $|Z|=0$.

Prueba:

Teorema: (Carathéodory) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable $\iff$ para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vale

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A - E|_e.$$

$\square$