Las siguientes prop. relacionan la medida exterior con la medida de:
- abiertos
- conjuntos G_δ.

Topología $\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ subconjuntos}\}$ con

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$
2) $\{A_\ell\}_\ell$ colección en $\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bigcup A_\ell \in \mathcal{T}}$
3) $\{A_i\}_{i=1}^n$ colección en $\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}}$

uniones de abiertos son abiertos

intersecciones finitas de abiertos son abiertos.

σ-álgebra: $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ subconjunto}\}$:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$
2) $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ colección enumerable en $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.
3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ $\qquad \Rightarrow \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Ej $\bigcap_{n=1}^\infty (0, 1+1/n) = (0,1]$.

Def: Un conjunto es $\underline{G_\delta}$ si es de la forma $H=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, donde G_i son abiertos (de la topología usual de $\mathbb{R}^n$).

Def: Un conjunto es $\underline{F_\sigma}$ si es de la forma $F=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, donde F_i son cerrados.

Obs! $G_{\sigma\delta}$ de la forma $\dots \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{in}}_{G_\delta}$ $\qquad F_{\delta\sigma} \dots$

$G_{\delta\sigma\delta} \quad \dots \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{ijk}$ $\qquad F_{\sigma\delta\sigma} \dots$

Prop: $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe G abierto en $\mathbb{R}^n$ con $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon.$$

Prueba: Cubrimos E por intervalos I_k, elegimos I_k de modo que

$$E \subseteq \bigcup_k I_k \quad \text{y} \quad \sum_k v(I_k) \leq |E|_e + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

G abierto

Tomamos ahora I_k^* intervalos tales que $I_k \subseteq \operatorname{int}(I_k^*)$, $\forall k$,

y que $v(I_k^*) \leq v(I_k) + \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$.

Definimos $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(I_k^*) \Rightarrow G$ es abierto, $E \subseteq \bigcup_k I_k \subseteq \overbrace{\bigcup_k \operatorname{in}(I_k^*)}^{=G}$

Además

$$|G|_e \leq \sum_k v(I_k^*) \leq \sum_k \left(v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \sum_k v(I_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\leq \sum_k v(I_k) + \varepsilon \cancelto{1/2}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \sum_k v(I_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq |E|_e + \varepsilon. \qquad \square$$

Prop 2: Sea $E\subseteq\mathbb{R}^n$. Existe $H\subseteq\mathbb{R}^n$ subconjunto de tipo G_δ tal que $E\subseteq H$ y $|H|_e=|E|_e$.

Prueba: Para todo $k\in\mathbb{Z}^+$, existe G_k abierto, con $E\subseteq G_k$ y $|G_k|_e\le|E|_e+1/k$. Tome $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k \Rightarrow H$ es G_δ y $E\subseteq\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k=H$.

Además,

$$|E|_e\le|H|_e\le|G_k|_e\le|E|_e+1/k$$

$H\subseteq G_k,\ \forall k$.

Haciendo $k\to\infty \Rightarrow |E|_e\le|H|_e\le|E|_e \Rightarrow |H|_e=|E|_e$. $\square$

Teorema: La medida exterior de Lebesgue independe del sistema de coordenadas elegido para $\mathbb{R}^n$: si $(x_1,\dots,x_n)$ y $(x_1',\dots,x_n')$ son sistemas coordenados en $\mathbb{R}^n$

$$|E|_e=|E_e|',\quad \forall E\subseteq\mathbb{R}^n.$$

$|E|=|E|$. (Wheeden y Zeegmund)

La medida de Lebesgue:

$\exists G$ abierto: $E \subseteq G$ y $|G|_e - |E|_e \leq \varepsilon$.

Def: Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que E es Lebesgue-mensurable (o mensurable) (o medible) si dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $E \subseteq G$ y

$$|G - E|_e < \varepsilon.$$

Si E es Lebesgue-mensurable, definimos su medida de Lebesgue

$$|E| = |E|_e.$$

Ejemplos: (1.) Todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es mesurable.

Prueba: U es abierto y $U \subseteq U$ y $|U-U|_e = |\emptyset|_e = \overset{<\varepsilon,\ \forall \varepsilon}{0}$ (¿por qué?)

(2.) Todo conjunto de medida cero (exterior) es mesurable.

Prueba: Suponga que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que $|E|_e = 0$. Por la Prop. 1 dado $\varepsilon > 0$, existe $G \subseteq \mathbb{R}^n$, G abierto tal que $E \subseteq G$ y

$$|G|_e \le |E|_e + \varepsilon.$$

Pero, $G - E \subseteq G \Rightarrow |G-E|_e \le |G|_e \le \cancel{|E|_e}^{\,0} + \varepsilon \le \varepsilon$. □

(3.) Unión enumerable de conjuntos mesurables, es mesurable.

Prueba: Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde los $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ son mesurables.

Para cada $\varepsilon>0$, existe $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$, G_k abierto tal que $E_k \subseteq G_k$ y

$$|G_k - E_k|_e < \varepsilon/2^k.$$

Tomamos $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. G es abierto y $E = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k G_k = G$.

La diferencia $G-E$ se puede escribir como

$$G-E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^c$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \cap E_k^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k).$$

$$\Rightarrow |G-E|_e \leq \left|\bigcup_k (G_k - E_k)\right|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |G_k - E_k|_e = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

$\square$

(4.) Todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible (intervalo cerrado n-dimensional)

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Prueba: $I = I^{o} \cup \partial I \to |\partial I|_e = 0 \Rightarrow$ mesurable, por (2)

I^{o} abierto $\Rightarrow$ mesurable, por (1)

$\Rightarrow$ I es mesurable (por ser unión de mesurables). (3)

(5.) Todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$, es mesurable.

Lema 1: $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ colección finita de intervalos que no se traslapen

$$\Rightarrow \quad \left| \bigcup_{k=1}^{n} I_k \right|_e = \sum_{k=1}^{n} |I_k|_e .$$

Lema 2: Si $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ con $d(E_1, E_2) > 0$

$$\Rightarrow \quad |E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$$