La medida de Lebesgue:

Consideremos intervalos n-dimensionales

$$I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i\}.$$

El volumen de I es $v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto cualquiera. Cubrimos E por una colección enumerable de intervalos $S = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)$.

Definir

$$\sigma(S) = \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$$

Def: La medida exterior de Lebesgue de E es

$$|E|_e = \inf\{\sigma(S) : S \text{ cubre a } E\}.$$

$\mathbb{R}^n$.

Obs: Las $\sigma(S) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq |E|_e \leq +\infty$.

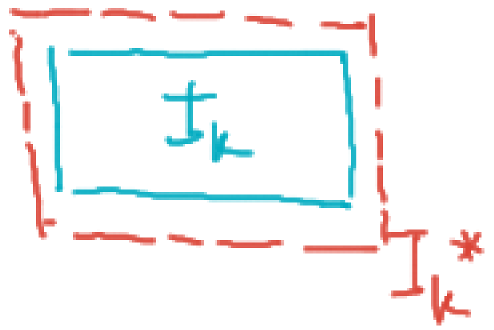
(Si E es limitado $|E|_e < \infty$, caso contrario $|E|_e = \infty$).

Prop 1: Para un intervalo n-dimensional I, $|I|_e = v(I)$.

Prueba: $S = \{I\}$ cubre a $I \Rightarrow |I|_e \leq \sigma(S) = v(I)$.

Suponga que $S = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ es cobertura de I. Dado $\varepsilon > 0$, sea I_k^* intervalo con: $I_k \subseteq \operatorname{int}(I_k^*)$ y

$$v(I_k^*) < v(I_k) + \varepsilon, \quad \forall k.$$



$v(I_k^*) - v(I_k) < \varepsilon$.

$\Rightarrow I \subseteq \bigcup_k I_k \subseteq \underline{\bigcup_k \operatorname{int}(I_k^*)} \subseteq \bigcup_k I_k^*$. $\Rightarrow \{\operatorname{int} I_k^*\}$ es cobertura abierta de I.

Como I es compacto, por Heine-Borel $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\underline{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \operatorname{int}(I_k^*) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \underline{I_k^*} \qquad \tilde{S} = \{I_k\}_1^N$$

$$\Rightarrow v(I) \leq \sum_{k=1}^{N} v(I_k^*) \leq \sum_{k=1}^{N} \left(v(I_k) + \varepsilon \right) = \sum_{k=1}^{N} v(I_k) + N\varepsilon .$$

$$\Rightarrow v(I) \leq \sigma(\tilde{S}) + N\varepsilon \leq \sigma(S) + \cancel{N}\varepsilon$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, y calculando ínfimo

$$\Rightarrow v(I) \leq \sigma(S), \forall S. \quad \text{Portanto} \quad v(I) \leq |I|_e . \quad \square$$

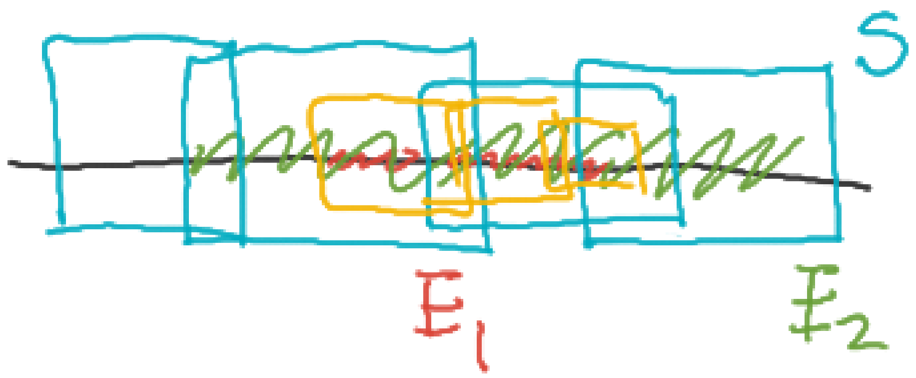
Prop: Si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $|E_1|_e \leq |E_2|_e$.

Prueba: Si S es cobertura de $E_2 \Rightarrow S$ es cobertura de E_1.

$$\left(E_1 \subseteq E_2 \subseteq \bigcup S \right)$$

$\Rightarrow \quad \{\text{coberturas de } E_1\} \supseteq \{\text{coberturas de } E_2\}$

$\Rightarrow |E_1|_e = \inf\{\sigma(S) : S \text{ cubre } E_1\} \leq \inf\{\sigma(S) : S \text{ cubre } E_2\} = |E_2|_e$



S cubre $E_2 \Rightarrow$ S cubre E_1

Prop 3: Si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es unión enumerable de subconjuntos cualesquiera $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$|E|_e \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e \quad \text{(sub-aditividad).}$$

Prueba: • Si $|E_k|_e = \infty$ para algún k, no hay nada que mostrar.

• Suponga que $|E_k|_e < \infty, \forall k$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, elegimos $I_j^{(k)}$ tales que $E_k \subseteq \bigcup_j I_j^{(k)}$ y

$\sum_j v(I_j^{(k)}) < |E_k|_e + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Como $E \subseteq \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_{j,k} I_j^{(k)}$

$\Rightarrow \{I_j^{(k)}\}_{j,k}$ cubre E

$$\Rightarrow |E|_e \leq \Big|\bigcup_{j,k} I_j^{(k)}\Big|_e \leq \sum_{j,k} v(I_j^{(k)}) = \sum_k \sum_j v(I_j^{(k)})$$

$$\leq \sum_k \left(|E_k|_e + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_k |E_k|_e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|_e + \varepsilon \cdot \cancelto{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}$$

$$\leq \sum_k |E_k|_e + \cancel{\varepsilon}$$

Como ε es arbitrario

$$\Rightarrow |E|_e \leq \sum_k |E_k|_e . \quad \square$$

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene <u>medida cero</u> o <u>medida nula</u> si $|E|_e = 0$.

De las prop 2 y 3:

- Subconjuntos de un medida cero, son de medida cero.
- Uniones de conjuntos medida cero, tiene medida cero enumerables

<u>Ejemplo:</u> (Conjunto de Cantor)

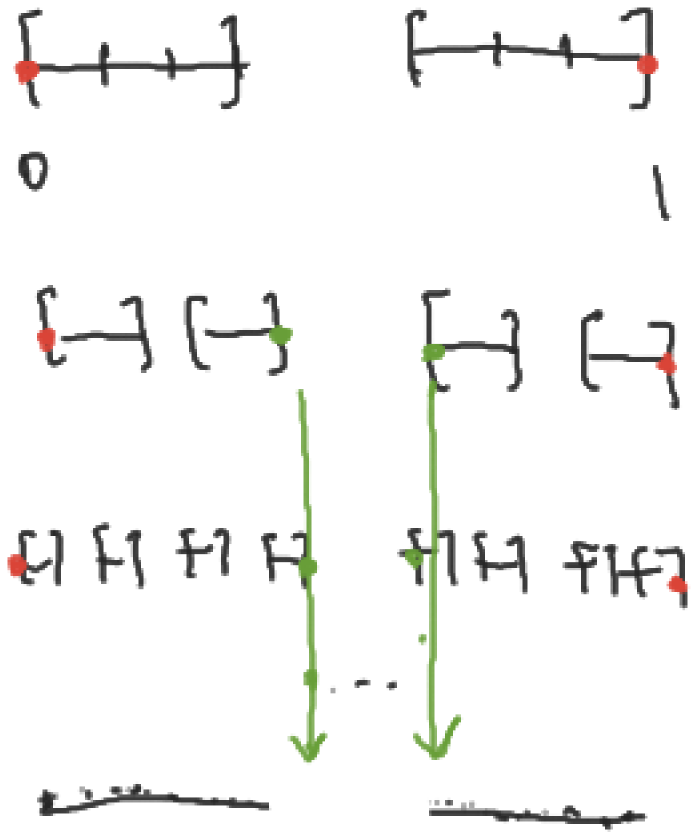
$C_0 = [0,1]$

$C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$

$C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$

$C_3 = \ldots$

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$$



1	int.	long	1
2	"	"	1/3
4	"	"	1/9
⋮			

Cantor $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

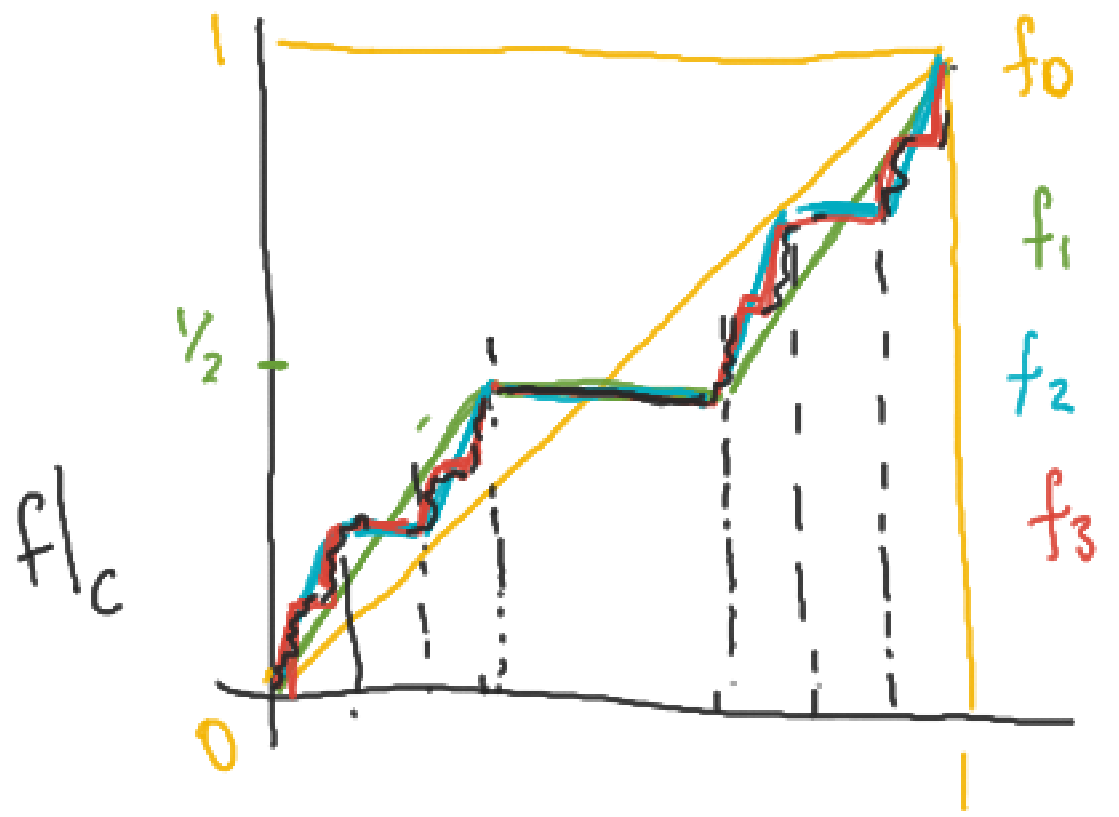
Propiedades de C:

- $C \neq \emptyset$
- $x \in C \Rightarrow$ la representación base 3 de x tiene sólo 0's y 2's.
- C es cerrado + limitado $\Rightarrow$ C compacto.
- $|C|_e$

$$C = \bigcap_{n \geq 1} C_n \qquad |C_n|_e = \sum_{m=1}^{2^n} |\text{intervalos}| = \sum_{m=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow C \subseteq C_n \;, \forall n$$

$$\Rightarrow |C|_e \leq |C_n|_e = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to\, 0} \;, \forall n \quad \Rightarrow |C|_e = 0.$$



$D_n = [0,1] - C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n-1} I_j^n$

($2^n - 1$ int. abiertos).

Definimos funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$

f_n es no decreciente, lineal por partes

$f_n(x) = j 2^{-n}$, $x \in I_j^n$.

$\{f_n\}$ unif continua, f_n son no-decreciente

$\Rightarrow f_n \to f$, $f : [0,1] \to [0,1]$ no decreciente

f función de Cantor-Lebesgue.

$C \overset{\simeq}{\longleftrightarrow} [0,1]$ f sirve para construir una biyección entre C y $[0,1]$