Lema: g monótona creciente, f g-integrable en $[a,b]$. Entonces

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \int_a^b |f|\,dg \leq \|f\|_J\,(g(b)-g(a)).$$

Prueba: f g-integrable $\Rightarrow$ $|f|$ es g-integrable. Tome $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ partición de $[a,b]$. Entonces en los puntos intermedios ξ_i

$$-\|f\|_J \leq -|f(\xi_i)| \leq f(\xi_i) \leq |f(\xi_i)| \leq \|f\|_J .$$

Multiplicando por $\Delta g_i = g(t_i)-g(t_{i-1})$ y sumando, resulta

$$-\sum_{i=1}^n \|f\|\,\Delta g_i \leq -\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\,\Delta g_i \leq \sum_{i=1}^n \|f\|\,\Delta g_i$$

$$\Rightarrow\ -\|f\|\,(g(b)-g(a)) \leq -s(|f|,g,P) \leq \underline{s(f,g,P)} \leq s(|f|,g,P) \leq \|f\|\,(g(b)-g(a)).$$

$$\Rightarrow\ |s(f,g,P)| \leq s(|f|,g,P) \leq \|f\|\,(g(b)-g(a)).$$

Tomando límites cuando $|P|\to 0$.

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \int_a^b |f|\,dg \leq \|f\|_J \,(g(b)-g(a)). \quad \square$$

<u>Cor</u>: Si $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$m\,(g(b)-g(a)) \leq \int_a^b f\,dg \leq M\,(g(b)-g(a)). \quad \square$$

<u>Teorema</u>: (1er Teorema del Valor Medio).

g monótona creciente, f continua en $[a,b]$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que

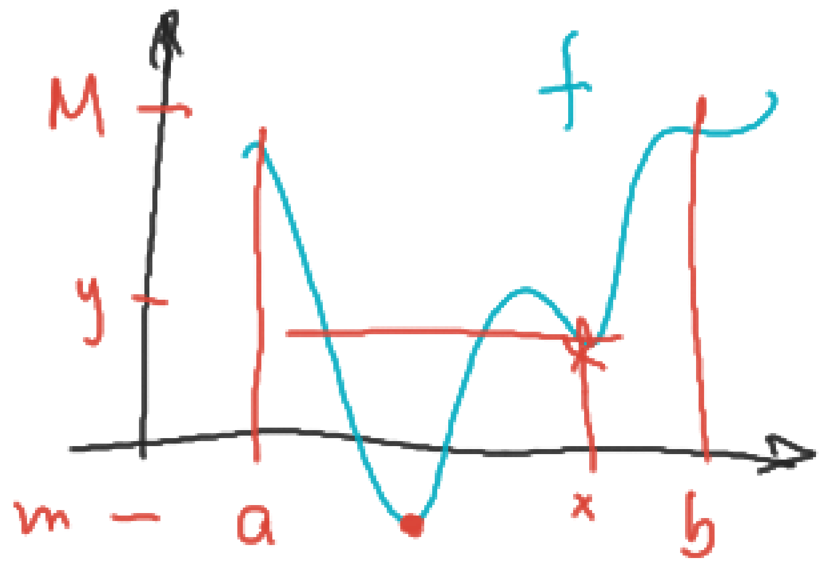
$$\int_a^b f\,dg = f(c)\int_a^b dg = f(c)\,(g(b)-g(a)).$$

<u>Prueba</u>: Sean $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$. Del corolario anterior

$$m\underbrace{(g(b)-g(a))}_{\neq 0} \leq \int_a^b f\,dg \leq M(g(b)-g(a)).$$

- Si $g(b)=g(a)$: $\Rightarrow \int_a^b f\,dg = 0 = f(c)\cdot(g(b)-g(a))$, $\forall c \in [a,b]$.
- Si $g(b)>g(a)$: Dividiendo entre $g(b)-g(a)$

$$\Rightarrow \quad m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f\,dg}{g(b)-g(a)}}_{y} \le M.$$



Por el Teorema del Valor Medio de Bolzano

$\exists\, c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y = \int f\,dg \,/\, (g(b)-g(a))$.

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f\,dg = f(c)\big(g(b)-g(a)\big). \quad \square$$

Teorema de Diferenciación (T. Fundamental del Cálculo, 1ª parte).

f continua, g monótona creciente en $[a,b]$, y suponga que g es diferenciable en (a,b). Entonces, la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(t) = \int_a^t f\,dg$$

es diferenciable, y

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t)\, g'(t).$$

ingrediente: T. Valor Medio.

Prueba: Tome $c\in(a,b)$ y $h>0$ tal que $c+h\in(a,b)$. Por el T. del Valor Medio

$$F(c+h)-F(c) = \int_a^{c+h} f\,dg - \int_a^{c} f\,dg = \int_c^{c+h} f\,dg$$

$$= f(\xi)\cdot\big(g(c+h)-g(c)\big),$$

para algún $c\leq\xi\leq c+h$.

Dividiendo entre h y tomando el límite cuando $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)\big(g(c+h)-g(c)\big)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(\xi)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(h+c)-g(c)}{h}}_{g'(c)}$$

$$= \lim_{\xi\to c} f(\xi)\cdot g'(c) = f(c)\,g'(c).$$

$\Rightarrow$ F es dif. en c y $F'(c)=f(c)g'(c)$. $\forall c\in(a,b)$. $\square$

<u>Teorema</u>: (2° Teorema del Valor Medio).

a) f creciente, g continua en $[a,b]$, entonces $\exists c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f\,dg = f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg .$$

<u>Prueba</u>: f creciente, g continua $\Rightarrow$ g es f-integrable (Cr. Riemann).

Por el 1er T. Valor Medio

$$\int_a^b g\,df = g(c)\cdot(f(b)-f(a)). \qquad \exists c\in[a,b].$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,df$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(c)f(b) + g(c)f(a)$$

$$= f(a)\left[g(c)-g(a)\right] + f(b)\left[g(b)-g(c)\right]$$

$$= f(a)\int_a^c dg + f(b)\int_c^b dg. \quad \square$$

Teorema: (Cambio de Variable).

$f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, f es continua y g integrable. Suponga que $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ es una función biyectiva y diferenciable con $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Entonces

$$\int_a^b f\,dg=\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,d(g\circ\varphi)$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\cdot g'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds.$$

$\square$

Si $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$

$$\int_a^b f\,dg=-\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,d(g\circ\varphi).$$

cambio de orientación.

Recordemos que si $f_n, f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ f_n, f son g-integrables

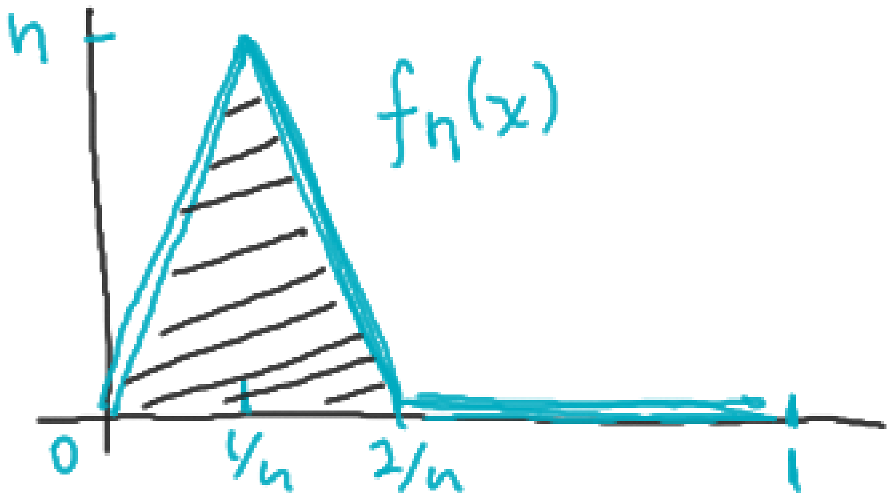
y $f_n \to f$, entonces nos gustaría

$(f = \lim_n f_n)$

$$\int_a^b f \, dg = \lim_n \int_a^b f_n \, dg.$$

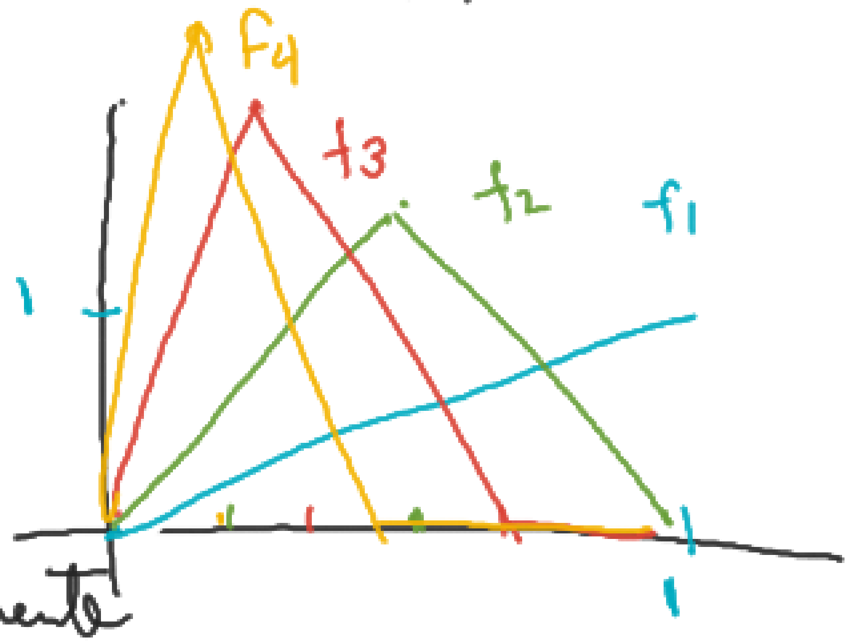
Vale esto siempre? <u>No</u>.

<u>Ej</u>: $g(x) = x$. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x; & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2(x - 2/n); & 1/n \le x \le 2/n \\ 0; & 2/n \le x \le 1 \end{cases}$



$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$



$f_n(x) \to 0, \ \forall x$

$\Rightarrow \boxed{f_n \to 0}$ puntualmente

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \ , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_n \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx.$$

Bajo qué condiciones $\int f dx = \lim_n \int f_n dx$?

convergencia uniforme $\left(f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \right)$.

$\varepsilon(n)$

Teorema: (Teorema de Convergencia Limitada).

$\{f_n\}$ sec. de funciones g-integrables en $[a,b]$, g monótona creciente.

Suponga que existe $B>0$ tal que $|f_n(x)| \leq B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a,b]$

Si la función $f = \lim_n f_n$ existe y f es g-integrable, entonces

$$\int f dg = \lim_n \int f_n dg.$$

$$\int (\lim_n f_n) dg = \lim_n \left(\int f_n dg \right)$$

Teorema: (Teorema de Convergencia Monótona).

$\{f_n\}$ sec. de funciones g-integrables en $[a,b]$, g monótona creciente,

y suponga que $f_n \to f$ monótonamente.

- $f_n \nearrow f$ $\qquad f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \cdots \leq f(x)$
- $f_n \searrow f$ $\qquad f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \cdots \geq f(x)$

Si f es g-integrable, entonces

$$\int f\,dg = \lim_n \int f_n\,dg.$$

$\square$

Nota: Dominada (Luxemberg).

Dominada $\Rightarrow$ Monótona.