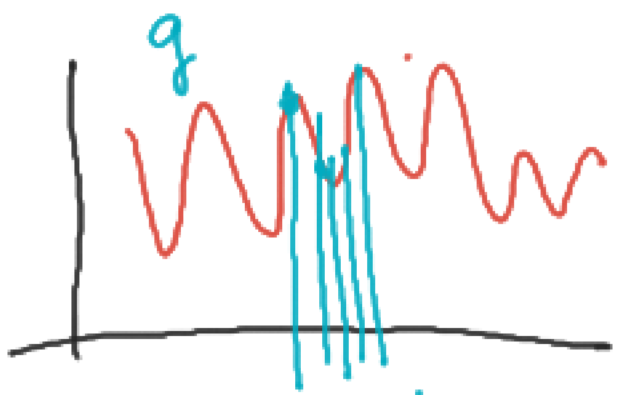
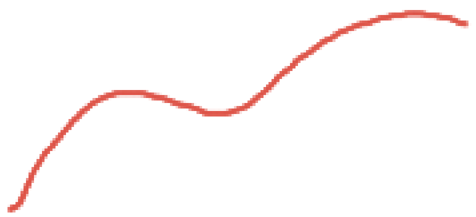




evitar que $\sum |\Delta g_i|$ crezca indefinidamente

$$\sum |\Delta g_i| = \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| \not\to \infty$$

Propiedades: • f creciente $\quad v_f(P) = f(b) - f(a)$

$$V_f[a,b] = f(b) - f(a)$$

• f Lipschitz $\Rightarrow$ f es BV y $V_f[a,b] \leq M\cdot(b-a)$

• $|f'| \leq M$ $\Rightarrow$ 〃 〃

cf

Prop. 1) Si $f_1, f_2 \in BV(a,b)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in BV(a,b)$.

2) Si $f_1, f_2 \in BV(a,b) \Rightarrow f_1 f_2 \in BV(a,b)$.

1 $BV(a,b)$ es un espacio vectorial real

1 + 2 $BV(a,b)$ es algebra.

$$V_{f_1+f_2}(a,b) \leq V_{f_1}(a,b) + V_{f_2}(a,b)$$

$$V_{\alpha f}(a,b) = |\alpha|\, V_f(a,b)$$

$$V_{f_1 f_2}(a,b) \leq \|f_1\|\, V_{f_2}(a,b) + \|f_2\|\, V_{f_1}(a,b)$$

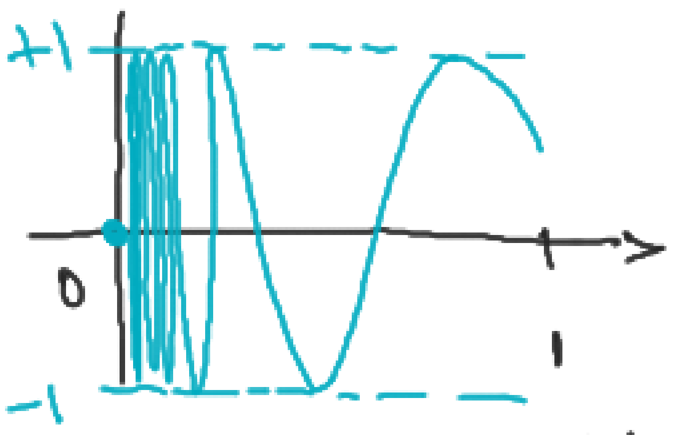
donde $\|f\| = \sup_{[a,b]} |f|$.

- La función $f \to V_f[a,b]$ no es una norma en $BV(a,b)$ (todas las func. constantes tienen $V_f(a,b) = 0$).

Pero $f \to \|f\|_{BV} = |f(a)| + V_f(a,b)$ si es norma.

Ejemplo: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0; & x=0\\ \operatorname{sen}\frac{1}{x}; & x\neq 0.\end{cases}$

f no es de variación limitada en $[0,1]$.



Para cada $n\in\mathbb{N}$ tomamos la partición

$$P_n=\Big\{0,\underbrace{\tfrac{2}{n\pi},\dots}_{t_i},\tfrac{2}{3\pi},\tfrac{2}{2\pi},\tfrac{2}{\pi},1\Big\}. \qquad c=\operatorname{sen}1-\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}$$

$$v_f(P)=\sum_{i=1}^{n+1}|f(t_i)-f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}\overbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi i}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi(i-1)}{2}\right)\right|}^{1}+c$$

$$=\sum_{i=1}^{n}1+c=n+c.$$

$\Rightarrow$ $\{v_f(P_n):n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N}+c$ no es limitado.

$\Rightarrow$ $f\notin BV(0,1)$.

Teorema: (Criterio de Riemann para integrabilidad).

$J=[a,b]$, $\boxed{g \text{ monótona creciente}}$. Entonces f es g-integrable $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists P_\varepsilon$ partición de J tal que si $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ refina a P_ε, vale

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta g_i} < \varepsilon. \qquad \sum_{i=1}^{n}|M_i-m_i|\cdot\Delta g_i<\varepsilon$$

Donde, $m_i=\inf_{[t_{i-1},t_i]} f$, $M_i=\sup_{[t_{i-1},t_i]} f$.

Prueba: $(\Rightarrow)$ f es g-integrable. Dado $\varepsilon>0$, Tome $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ refinamiento de P_ε con

$$\left|s(f,g,P)-\int f\,dg\right|<\varepsilon/2(1+g(b)-g(a)).$$

Para cualquier suma de RS tomamos $y_i,z_i\in[t_{i-1},t_i]$ tales que

$$M_i-\varepsilon<f(y_i),\quad f(z_i)<m_i+\varepsilon$$

$$\Rightarrow M_i-m_i<(f(y_i)+\varepsilon)+(-f(z_i)+\varepsilon)<f(y_i)-f(z_i)+2\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta g_i \le \sum_{i=1}^{n} \left(f(y_i) - f(z_i) + 2\varepsilon \right) \cdot \Delta g_i$$

$$\le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta g_i}_{①} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta g_i}_{②} + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta g_i$$

$|① - \int| < \varepsilon$ $\quad |② - \int| < \varepsilon$ $\quad |① - ②| < \frac{2\varepsilon}{\dots}$

$$\le 2\varepsilon / 2(1 + g(b) - g(a)) + 2\varepsilon\,(g(b) - g(a))$$

$$\le 2\varepsilon \left[\frac{1}{2(1+g(b)-g(a))} + (g(b) - g(a)) \right] = 2\varepsilon C$$

$$\Rightarrow \sum (M_i - m_i)\Delta g_i < \varepsilon'$$

$(\Leftarrow)$ Assume $\sum (M_i - m_i)\Delta g < \varepsilon$

$\sum f(u_i)\Delta g_i \qquad \sum f(v_i)\Delta g_i$

$|f(u_i) - f(v_i)| \le M_i - m_i$

$|S(f,g,P) - S(f,g,Q)| < \varepsilon$ (Criterio de Cauchy)

$\Rightarrow f$ es g-integrable. $\blacksquare$

Teorema: (Criterio de Riemann general)

$\boxed{g \in BV(a,b).}$ f es g-integrable $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists P_\varepsilon$ tal que si P refina P_ε entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) |\Delta g_i| < \varepsilon .$$

basta f limitada

$\square$

Corolario 1: f continua, g monótona $\Rightarrow$ f es g-integrable /

Corolario 2: f continua, g BV $\Rightarrow$ f es g-integrable /

Corolario 3: f BV, g continua $\Rightarrow$ f es g-integrable /

Prueba: g es f-integrable $\Rightarrow$ f es g-integrable (Integración por partes)

Teorema: g monótona creciente en $J=[a,b]$, $f, f_1, f_2 : J \to \mathbb{R}$.

a) f es g-integrable $\Rightarrow$ $|f|$ es g-integrable

b) f_1, f_2 son g-integrables $\Rightarrow$ $f_1 f_2$ es g-integrable.

Prueba: $P=\{t_0, \dots, t_n\}$ partición de J, $M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f$, $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f$.

$\Rightarrow M_i - m_i = \sup\{|f(x)-f(y)| \; x,y \in [t_{i-1},t_i]\}$.

a) Como f es g-integrable $\Rightarrow \sum |M_i - m_i| \Delta g_i < \varepsilon \Rightarrow M_i - m_i < \varepsilon \; \forall i$

$\Rightarrow \big|\, |f(x)| - |f(y)| \,\big| \leq |f(x)-f(y)| \leq M_i - m_i < \varepsilon$.

Por Criterio de Riemann $\Rightarrow \sum \big|\, |f(x_i)| - |f(y_i)| \,\big| \Delta g_i < \varepsilon (g(b)-g(a)) = \varepsilon'$

$\Rightarrow |f|$ es g-integrable.

b) Si $|f| \leq K$ (f es g-integrable) entonces $|f(x)^2 - f(y)^2| = |(f(x)+f(y)) \cdot (f(x)-f(y))|$

$\leq \big|\, |f(x)| + |f(y)| \,\big| \cdot |f(x)-f(y)| \leq 2K |f(x)-f(y)| \leq 2K\varepsilon$.

$\Rightarrow f^2$ es g-integrable.

$\Rightarrow f_1 + f_2$ integrable $\Rightarrow (f_1+f_2)^2$ g-int.

$\Rightarrow$ f_1, f_2 g-integrables $\Rightarrow$ f_1^2, f_2^2 son g-integrables.

$$\Rightarrow \quad f_1 f_2 = \frac{(f_1+f_2)^2 - f_1^2 - f_2^2}{2} \quad \text{es g-integrable.}$$

□

Bartle, Análisis cap. 29,30.