Teorema: (Modificación de la Integral)

Si g' existe en $[a,b]$ y f es g-integrable, entonces fg' es Riemann integrable y

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg' = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

$$dg = g'(t)dt.$$

Prueba: g' existe cont. en $[a,b] \Rightarrow g'$ es uniformemente continua en $[a,b]$. Para $\varepsilon>0$ sea $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ partición tal que si $\xi_i,\zeta_i \in [t_{i-1},t_i] \Rightarrow |g'(\xi_i)-g'(\zeta_i)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|(b-a)}$

Tomamos la diferencia entre $S(f,g,P)$ y $S(fg',P)$.

$$\left| S(f,g;P) - S(fg',P) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\,(t_i - t_{i-1}) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\zeta_i)\,(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)\,(t_i - t_{i-1}) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \cdot \big(\underbrace{g'(\zeta_i) - g'(\xi_i)}\big) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \frac{\varepsilon}{\|f\|(b-a)} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \cancel{|f(\xi_i)|} \frac{\varepsilon}{\cancel{\|f\|}(b-a)} (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \cancel{(b-a)} = \varepsilon.$$

$\exists \zeta_i$

$g'(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}) = g(t_i) - g(t_{i-1})$

$g(\xi_i)\Delta t_i = \Delta g_i$

Tomando límite cuando $|P| \to 0$

$$A(f,g,P) \longrightarrow \int f\,dg \,,\quad A(fg',P) \longrightarrow \int fg'$$

$$\left| A(f,g,P_1) - \int f\,dg \right| < \varepsilon/3 \,,\quad \left| A(fg',P_2) - \int fg' \right| < \varepsilon/3$$

y $\left| A(f,g,P) - A(fg',P) \right| < \varepsilon/3$

Tomando un refinamiento Q común a P, P_1 y P_2

$$\Rightarrow \left| S(fg', P) - \int f\,dg \right| \leq \left| S(fg', P) - \int fg' \right| + \left| \int fg' - \int f\,dg \right|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ fg' es Riemann integrable y

$$\int fg' = \int f\,dg. \quad \square$$

Ejemplos: 1.) $\int_0^1 x\,d(x^2)$

usando integración por partes: $\int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df = f(x)g(x)\Big|_a^b$

$\Rightarrow \int_0^1 x\,d(x^2) = x\cdot x^2\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2\,dx$

$= x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

usando modificación de la integral

$\int_0^1 x\,d(x^2) = \int_0^1 x\cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

2) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

3.) $\int_0^5 x^2\,d(x - \lfloor x\rfloor) = \int_0^5 x^2\,dx - \int_0^5 x^2\,d\lfloor x\rfloor$

$= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^5 - \sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{125}{3} - 55$

$x^2(x-\lfloor x\rfloor)\Big|_0^5 - \int_0^5 (x-\lfloor x\rfloor)\,dx^2.$

Funciones de Variación Limitada

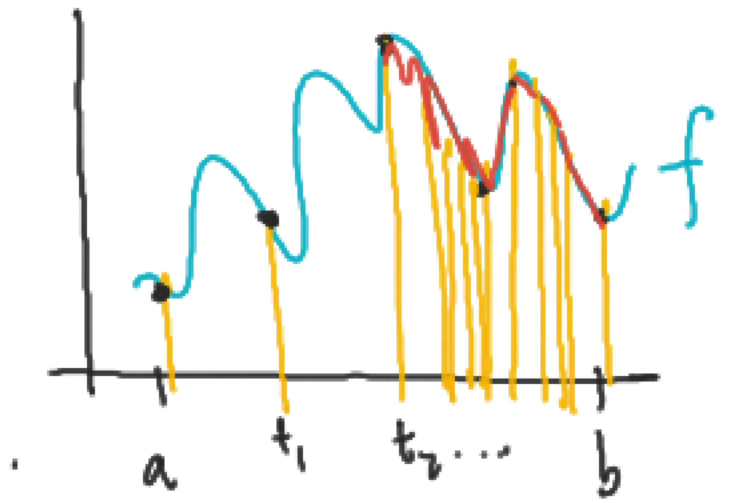
Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ partición de $[a,b]$.

Def: La variación de f respecto de P es

$$v_f(P)=\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|.$$

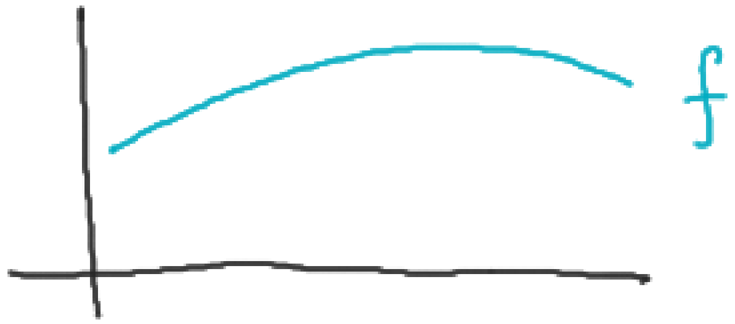
Si $\{v_f(P): P \text{ partición}\}$ es limitado decimos que f posee variación limitada. En ese caso, definimos la variación total de f en $[a,b]$

$$V_f[a,b]=\sup_P v_f(P).$$



$P=\{a,b\}$ $\quad v_f(P)=|f(b)-f(a)|$

$$\sum |f(t_i)-f(t_{i-1})| \longrightarrow \infty$$



$$\sum |f(t_i)-f(t_{i-1})| \longrightarrow V_f[a,b]$$

Propiedades:

- Si $P \subseteq Q$ (Q refina a P) $\Rightarrow v_f(P) \le v_f(Q)$.

$\pm f(r_i)$

$$v_f(P) = |f(t_i)-f(t_{i-1})| \le |f(t_i)-f(r_i)| + |f(r_i)-f(t_{i-1})|$$
$$\le v_f(Q).$$

- Si f es monótona creciente $\Rightarrow v_f(P) = f(b)-f(a),\ \forall P$.

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i)-f(t_{i-1})) = f(b)-f(a).$$

- Si f es monótona decreciente $\Rightarrow$ $v_f(P) = f(a) - f(b)$, $\forall P$.

En consecuencia, f monótona $\Rightarrow$ f es de variación limitada, y

$$V_f[a,b] = \begin{cases} f(b)-f(a); & f \text{ creciente} \\ f(a)-f(b); & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

- Si f es constante $\Rightarrow$ f es de variación limitada y $V_f[a,b]=0$.

<u>Notación</u> Al conjunto de funciones de variación limitada en $[a,b]$ lo denotamos por $BV(a,b)$. $f \in BV(a,b)$ f es BV.

- f es Lipschitz, con $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$. Entonces

$$v_f(P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)-f(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} M|t_i-t_{i-1}| \le \sum_{i=1}^{n} M(t_i-t_{i-1})$$

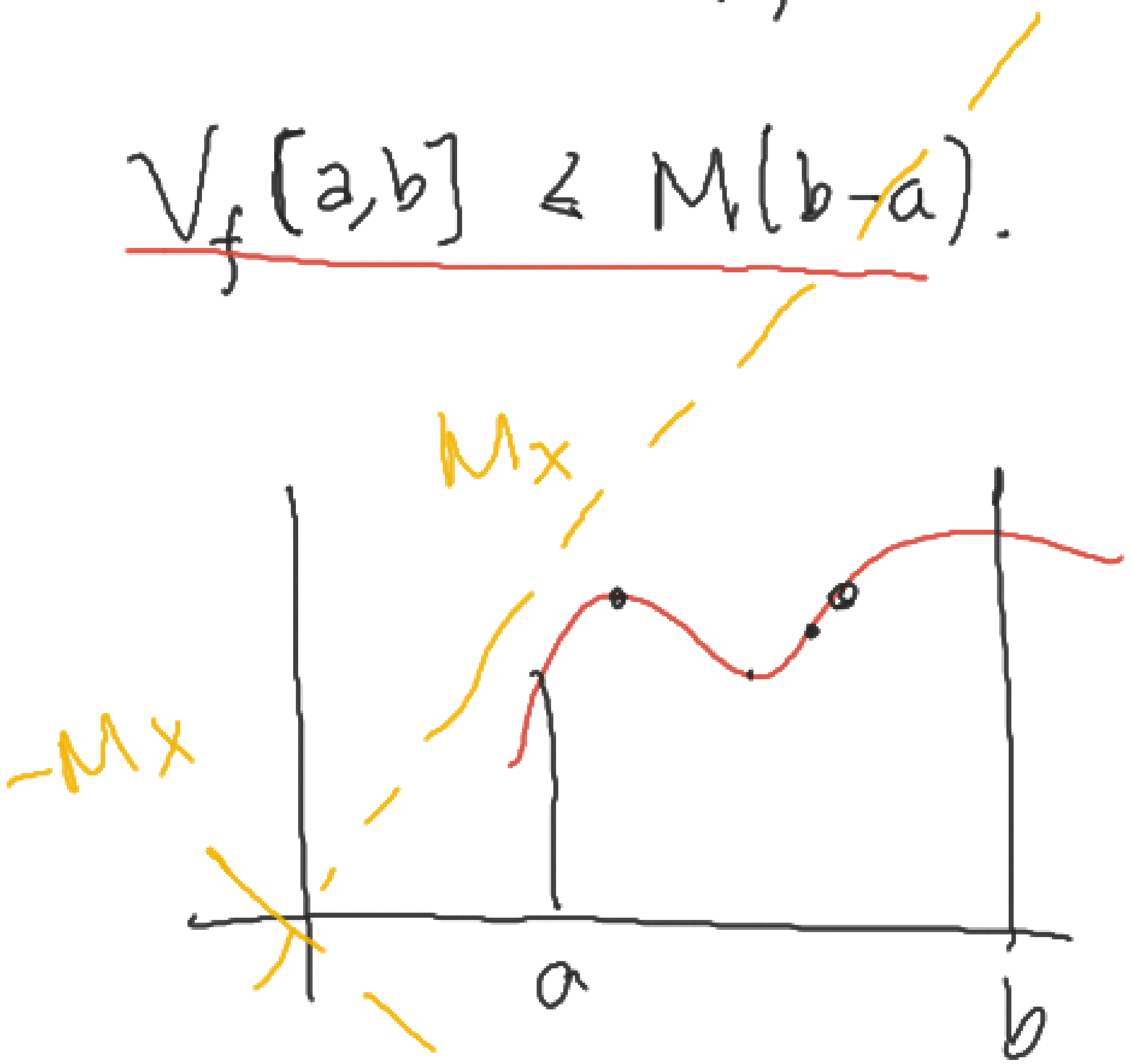
$$\le M\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}) = M(b-a), \quad \forall P$$

$\Rightarrow$ f es BV. $\qquad \underline{V_f[a,b] \le M(b-a)}$.

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$$

secante $\quad \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le M$

$x \neq y$



- Si f es diferenciable y $|f'(x)| \leq M \Rightarrow f$ es $BV[a,b]$.