Pumping Lemma para Lenguajes Regulares

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación **(Aula 11) 20.agosto.2025**

Discusión general de "Propiedades"

El Lema de Bombeo

Pertenencia, Vacuidad, Finitud, Etc.

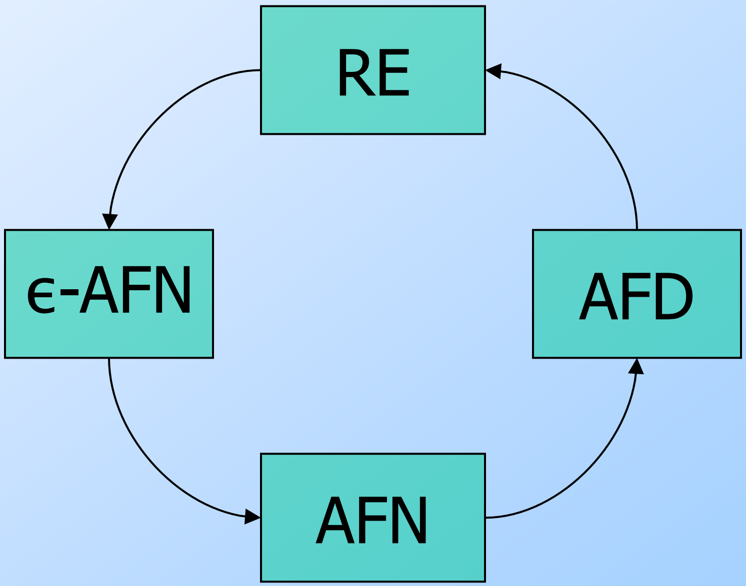
Clases de Lenguajes

- Una *clase de lenguajes* es un conjunto de lenguajes.
  - Ejemplo: los lenguajes regulares.

- Las clases de lenguajes tienen dos tipos importantes de propiedades:
  1. Propiedades de decisión.
  2. Propiedades de cerradura.

Y si L no es representado por un AFD?

- Recordemos que tenemos un ciclo de equivalencias para representar lenguajes regulares:



¿Por qué es importante saber si un lenguaje es regular?

1. Ayudan a construir representaciones. Regexp: solo valen para lenguajes regulares.

2. Decidir si un lenguaje es regular o no nos ayudan a determiner de antemano la estructura de esta clase de lenguajes.

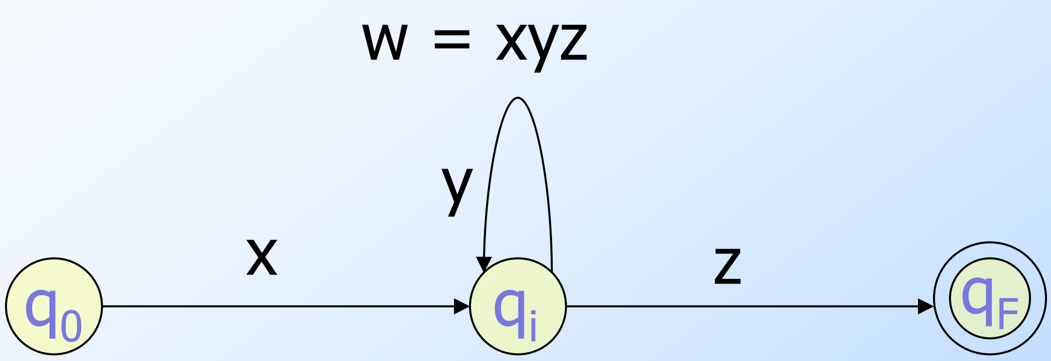
El problema de la finitud

- Dado un lenguaje regular L, es infinito?
- Comenzar con un AFD para L.
- Idea clave: si el AFD tiene *n* estados, y el lenguaje contiene cualquier cadena de longitud *n* o mayor, entonces L es infinito.
- Caso contrario, el lenguaje es finito.
  - Limitado a cadenas de longitud *n* o menor.

Prueba de la idea clave

- Si un AFD de n estados acepta una cadena w de longitud n o mayor, entonces debe haber un estado que aparece al menos dos veces en el trayecto de w desde el estado inicial q_0 al estado final q_F de w.
- Esto ya que hay al menos n+1 estados a lo largo del trayecto de w.

Prueba de la idea clave



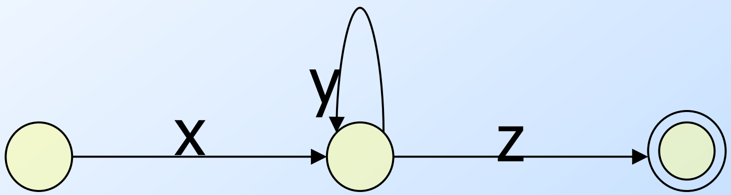
→ xy^iz está en el lenguaje, para todo $i \geq 0$.

Como y no es la cadena ϵ, todas las cadenas xy^iz (hay infinitas de ellas) están en L.

Finitud

- Aún no tenemos un algoritmo.
- Hay un número infinito de cadenas de longitud > n. No podemos testarlas todas.
- Segunda idea clave: si hay una cadena de longitud > n (= número de estados) en L, entonces debe haber una cadena de longitud entre n y 2n – 1.

Pueba de la 2ª idea clave

- Recordemos: 

- Podemos elegir y como el primer ciclo a lo largo del trayecto de w.
- Así, $|xy| \leq n$; en particular, $1 \leq |y| \leq n$.
- Luego, si w es de longitud 2n o mayor, hay una cadena de menor longitud en L que aún es de longitud n o más.
- Reducir hasta obtener algo en $[n, 2n-1]$.

Completamos el algoritmo de infinitud

- Verificar la pertenencia a L de todas las cadenas de longitudes entre n y 2n–1.
  - Si alguna es aceptada, entonces L es infinito. Caso contrario, L es finito.
- El peor algoritmo posible.
- Mejor idea: buscar la existencia de ciclos entre el estado inicial q_0 y final q_F.

Búsqueda de Ciclos

1. Eliminar los estados que no son alcanzables desde el estado inicial q_0.
2. Eliminar los estados que no llegan al estado final q_F.
3. Verificar si el grafo de transiciones remanente posee algún ciclo.

El Lema de Bombeo (*Pumping Lemma*)

- En lo anterior casi hemos probado, de forma accidental, un resultado que es muy útil para mostrar que ciertos lenguajes no son regulares.

- Este es llamado el *lema de bombeo para lenguajes regulares*.

Lema de Bombeo

Número de estados del AFD para L

Para todo lenguaje regular L,
existe un entero $n \geq 1$, tal que
para toda cadena $w \in L$ de longitud $\geq n$
podemos escribir $w = xyz$, donde:

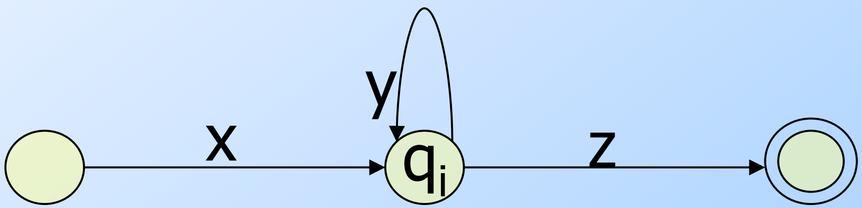
1. $|xy| \leq n$.
2. $|y| > 0$.
3. Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$.

y corresponde al primer ciclo en el trayecto de w

Prueba de Lema de Bombeo

1. Tomamos n = número de estados del DFA para L
2. Tomamos $w \in L$ de longitud $\geq n$
3. Por el principio de las casillas en el trayecto de w hay $\geq n+1$ estados, de modo que al menos un estado q_i se repite.
4. Tome y la subcadena de w del ciclo en q_i

$w = xyz$



(Observe que y tiene longitud al menos 1, no es la cadena vacía).

5. → xy^iz está en el lenguaje, para todo $i \geq 0$.
6. Como y no es la cadena ϵ, todas las cadenas de la forma xy^iz (hay infinitas de ellas) están en L.

Ejemplo: Lema de Bombeo

Vamos a mostrar que $L = \{0^k 1^k : k \geq 1\}$ no es un lenguaje regular.

- Suponga que sí es. Entonces existe un $n \geq 1$ para L que cumple el lema de bombeo.
- Tome $w = 0^n 1^n \in L$. Podemos escribir $w = xyz$, donde $|xy| \leq n$, $|y| > 0$. Esto implica que:
  1. $y \neq \varepsilon$.
  2. x, y consisten sólo de 0's
- Pero, por el lema de bombeo, la cadena $xyyz \in L$.
- Pero esta cadena tiene (n+1) 0's y n 1's. Absurdo!

Ejemplos:

Veremos en un momento que el lenguaje $L_1 = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$ no es regular.

- L_2 = {cadenas de 0's y 1's con el mismo número de 0's y de 1's} tampoco es regular (pero es más difícil de probar).
- Lenguajes regulares son cerrados bajo $\cap$.
- Si L_2 fuera regular, entonces $L_2 \cap L(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*) = L_1$ sería regular, pero no lo es.

Otros Ejemplos:

Los siguientes lenguajes no son regulares:

- $L = \{0^k 1^{2k} \mid k \geq 0\}$
- $L = \{a^k b^{2k} c^k \mid k \geq 0\}$
- $L = \{0^k 1^{k+5} \mid k \geq 0\}$
- $L = \{0^j 1^k 2^j \mid j, k \geq 0\}$
- $L = \{a^j b^k c^{j+k} \mid j, k \geq 0\}$