# Método de Arden

**Alan Reyes-Figueroa**

**Teoría de la Computación** **(Aula 07b) 04.agosto.2025**

## Equivalencia entre AFNs y expresiones regulares (Parte 2)

# Lema de Arden

***Lema* (Lema de Arden)**

Si A y B son lenguajes sobre un alfabeto Σ, y ε no está en A, entonces la ecuación **X = AX + B**, tiene como única solución el lenguaje X = A*B.

Ejemplos

1) La ecuación $X = aX + b^*ab$ tiene solución

$$\mathbf{X = a^*b^*ab}$$

2) La ecuación $X = a^2X + b^+X + ab$ tiene solución

$$\mathbf{X = (a^2 + b^+)^*ab}$$

3) La ecuación $X = ab^2X + aX + a^*b + b^*a$ tiene solución

$$\mathbf{X = (ab^2 + a)^*(a^*b + b^*a)}$$

# Algoritmo de Arden

Da otro mecanismo para convertir un AFN en su expresión regular equivalente.

Si $M = (K, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ es un AFN, observe que M posee un único estado inicial $q_0$.

Para cada estado $q_i \in K$, definimos $M_i = (K, \Sigma, \Delta, q_i, F)$ el autómata que coincide con M pero con estado inicial $q_i$.

Denotamos por $A_i$ el lenguaje aceptado por $M_i$.

Cada $A_i$ puede escribirse como

$$A_i = \begin{cases} \bigcup_{a \in \Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\}, & si\ q \notin F; \\ \bigcup_{a \in \Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\} + \varepsilon, & si\ q \in F. \end{cases}$$

# Algoritmo de Arden

Si $K=\{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, las igualdades anteriores conforman un sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{ccc}
A_0 & = & c_{00}A_0 + c_{01}A_1 + \cdots + c_{0n}A_n \\
A_1 & = & c_{10}A_0 + c_{01}A_1 + \cdots + c_{0n}A_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_n & = & c_{00}A_0 + c_{01}A_1 + \cdots + c_{0n}A_n
\end{array}
$$

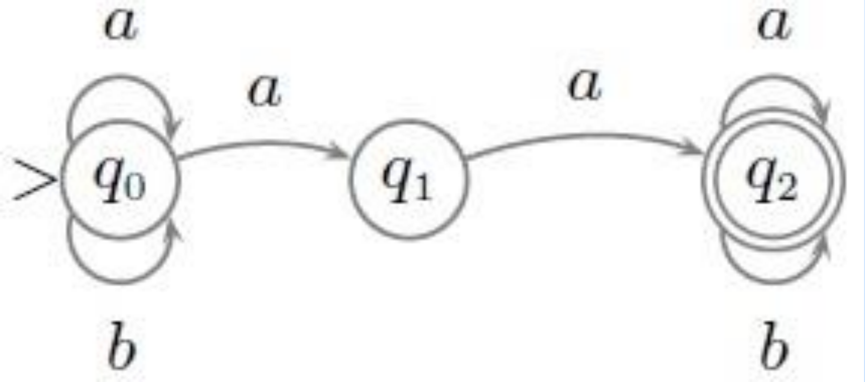
donde cada $c_{ij}$ o es $\varnothing$ ó es un símbolo de $\Sigma$.

El término $\varepsilon$ se añade a una ecuación sólo si el estado correspondiente $A_i$ es un estado de aceptación.

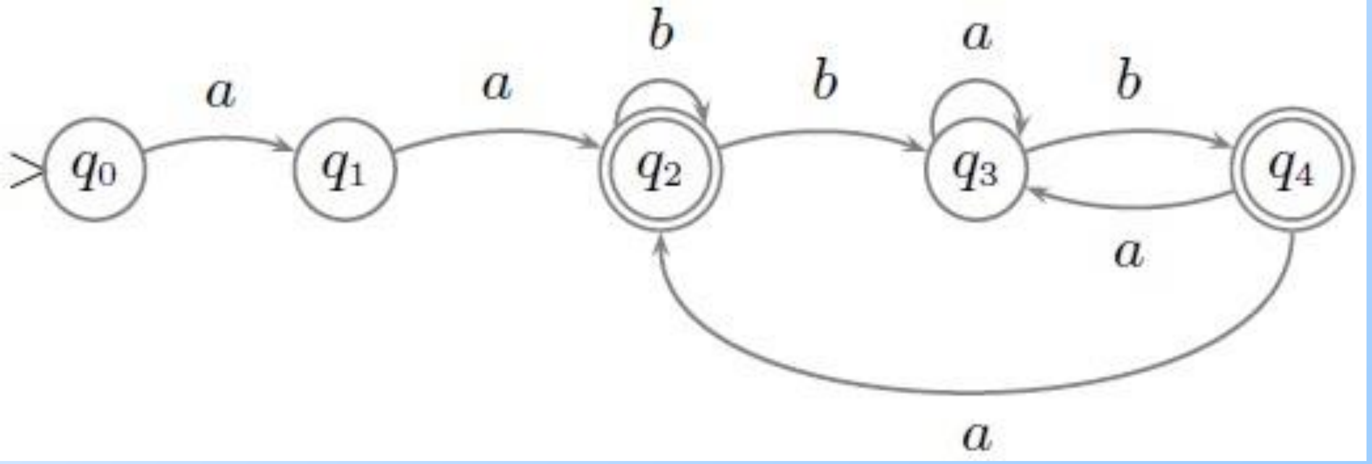
Basta aplicar sucesivamente el Lema de Arden para resolver este sistema (siempre hay solución y es única).

# Ejemplos

1)




2)



# Ejemplos

Resolvemos el ejemplo 1 anterior.

Tenemos el sistema de ecuaciones

$A_0 = aA_0 + bA_0 + aA_1$

$A_1 = aA_2$

$A_2 = aA_2 + bA_2 + \varepsilon.$

Reescribiendo de forma más simple:

$A_0 = (a+b)A_0 + aA_1$

$A_1 = aA_2$

$A_2 = (a+b)A_2 + \varepsilon.$

Aplicamos el Lema de Arden a la última ecuación. Esto da

$A_2 = (a+b)^* \varepsilon = (a+b)^*.$

# Ejemplos

Sustituyendo $A_2$ en las primeras 2 ecuaciones del sistema obtenemos:

$A_0 = (a+b)A_0 + aA_1$

$A_1 = a(a+b)^*.$

Sustituyendo $A_1$ en la primera ecuación, resulta

$A_0 = (a+b)A_0 + aa(a+b)^*.$

Ahora, aplicamos de nuevo el lema de Arden a la última ecuación. Esto resulta en

$A_0 = (a+b)^*aa(a+b)^*.$

La expresión regular del autómata es **R = (a+b)*aa(a+b)*.**