Algoritmo de Reducción de Brzozowski-McCluskey

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación **(Aula 07a) 30.julio.2025**

Equivalencia entre AFNs y expresiones regulares (Parte 2)

Método de Reducción

Dado un AFN, construye una expresión regular que describe el lenguaje aceptado por el autómata.

Idea base: eliminar estados, 1 a la vez, a manera de reducir el AFN a un autómata de uno o dos estados sólo.

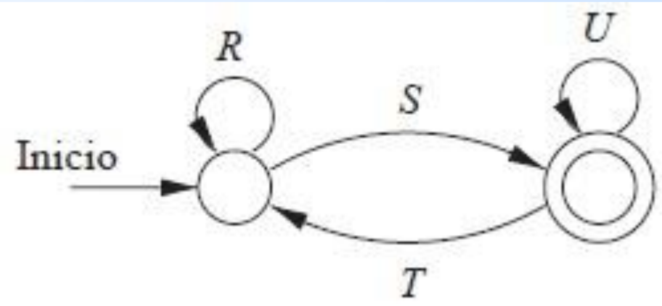


Figura 3.9. Un autómata genérico de dos estados.

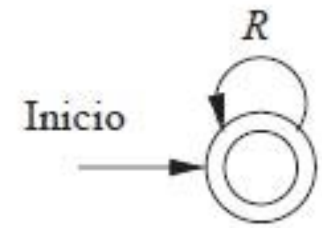
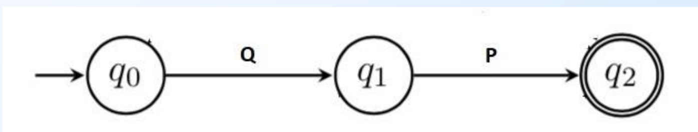


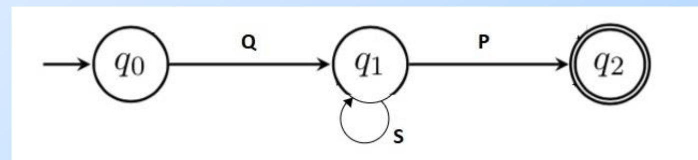
Figura 3.10. Autómata genérico de un estado.

Método de Reducción

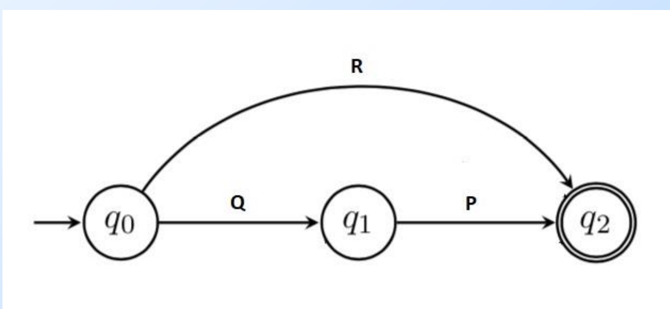
La siguiente figura muestra lo que ocurre al eliminar un estado *s*.



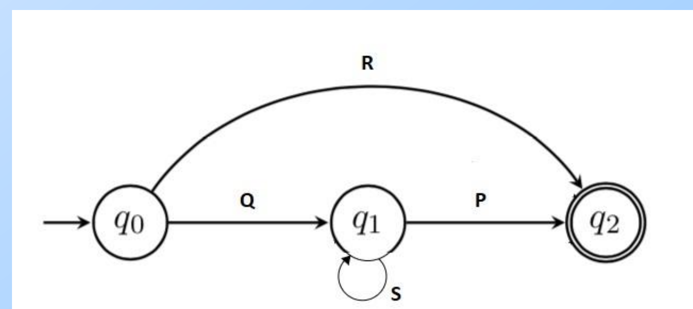
QP



QS*P



R + QP



R + QS*P

Método de Reducción

En general, eliminar un estado intermedio *s* implica considerar todas los caminos posibles de los qi a los pk.

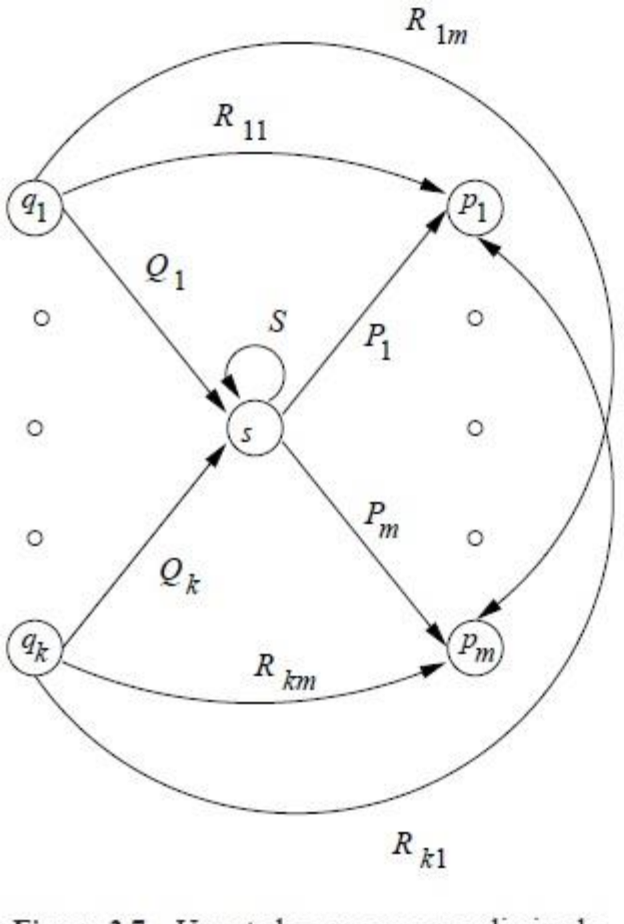


Figura 3.7. Un estado *s* que va a ser eliminado.

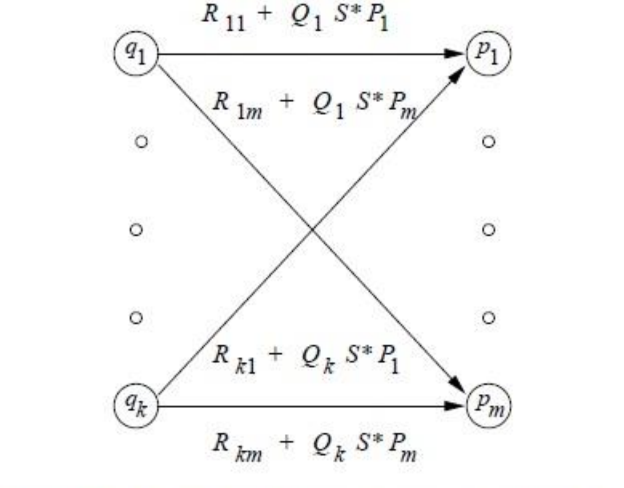
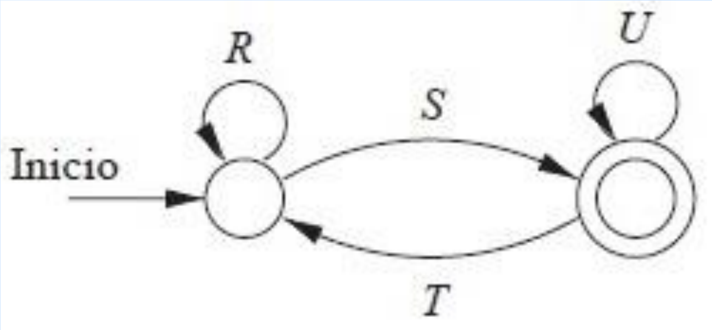


Figura 3.8. Resultado de eliminar el estado *s* de la Figura 3.7.

Método de Reducción

Paso 1: Para cada estado de aceptación q, aplicamos el proceso de reducción. Eliminamos todos los estados excepto q y el estado inicial q_0.

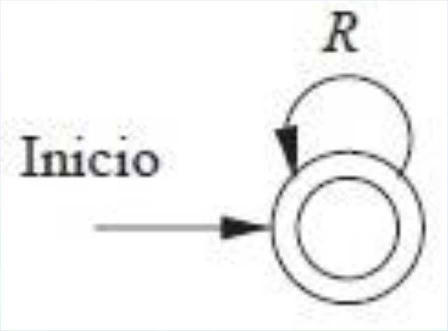
Paso 2a: Si $q \neq q_0$, llegaremos a un autómata de dos estados como



Cuya expresión regular es (R + SU*T)*SU*.

Método de Reducción

Paso 2b: Si q = q_0, llegaremos a un autómata de un solo estado como

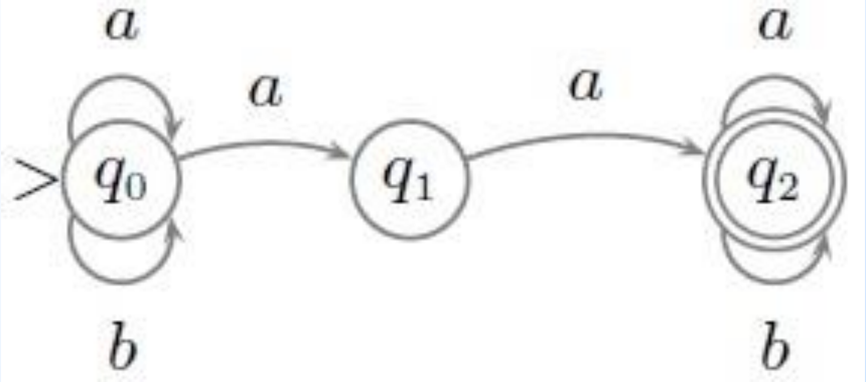


Cuya expresión regular es R*.

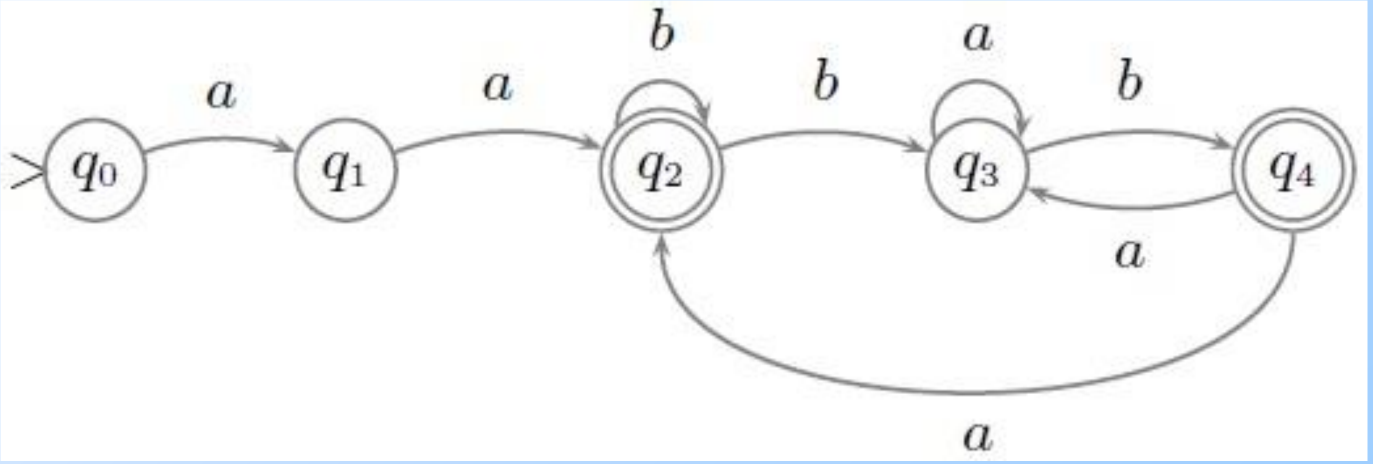
Paso 3: Finalmente, la expresión regular de todo el autómata es la suma (unión) de todas las expresiones obtenidas al reducir para cada estado de aceptación q.

Ejemplos

1)



2)



Lema de Arden

Lema **(Lema de Arden)**

Si A y B son lenguajes sobre un alfabeto Σ, y ε no está en A, entonces la ecuación $\mathbf{X = AX + B}$, tiene como única solución el lenguaje $X = A^*B$.

Ejemplos

1) La ecuación $X = aX + b^*ab$ tiene solución

$$\mathbf{X = a^*b^*ab}$$

2) La ecuación $X = a^2X + b^+X + ab$ tiene solución

$$\mathbf{X = (a^2 + b^+)^*ab}$$

3) La ecuación $X = ab^2X + aX + a^*b + b^*a$ tiene solución

$$\mathbf{X = (ab^2 + a)^*(a^*b + b^*a)}$$

Algoritmo de Arden

El lema de Arden proporciona otro mecanismo para convertir un AFN es una expresión regular.

Sea $M = (K, \Sigma, q_0, F, \Delta)$ un AFN. Observe que M posee un único estado inicial q_0.

Para cada estado $q_i \in K$, sea $M_i = (K, \Sigma, q_i, F, \Delta)$ el autómata que coincide con M pero con estado inicial q_i. Denotamos por A_i el lenguaje aceptado por M_i.

Cada A_i puede escribirse como

$$A_i = \begin{cases} \bigcup_{a\in\Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\}, & si\ q \notin F \\ \bigcup_{a\in\Sigma} \{aA_j : q_j \in \Delta(q_i, a)\} + \varepsilon, & si\ q \in F \end{cases}$$

Algoritmo de Arden

Si $Q = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, las igualdades anteriores conforman un sistema de ecuaciones "lineales"

$$\begin{array}{ccc} A_0 & = & c_{00}A_0 + c_{01}A_1 + \cdots + c_{0n}A_n \\ A_1 & = & c_{10}A_0 + c_{11}A_1 + \cdots + c_{1n}A_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & = & c_{n0}A_0 + c_{n1}A_1 + \cdots + c_{nn}A_n \end{array}$$

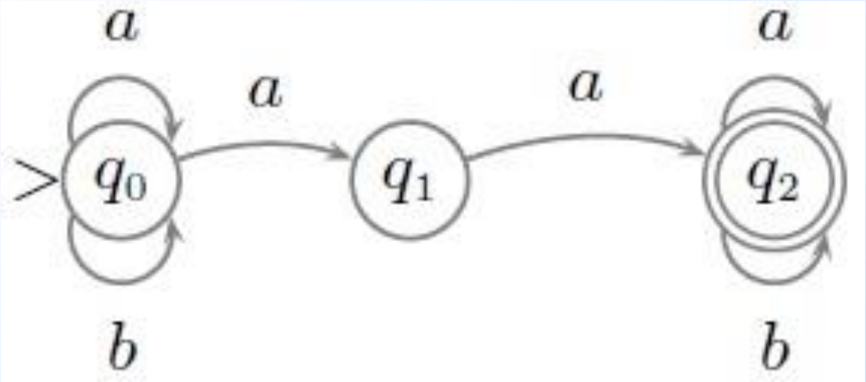
donde cada c_{ij} o es Ø ó es un símbolo de Σ.

El término ε se añade a una ecuación sólo si el estado correspondientes A_i es un estado de aceptación.

Basta aplicar sucesivamente el Lema de Arden para resolver este sistema (siempre hay solución y es única).

Ejemplos

1)



2)