Autómatas de Pila III (*pushdown automata*)

Alan Reyes-Figueroa
Teoría de la Computación (Aula 19) 16.octubre.2023

Equivalencia de PDAs y CFGs

Conversion of CFG to PDA

Conversion of PDA to CFG

Overview

- Cuando hablamos de propiedades de cerradura de lenguajes regulares, fue muy útil saltar entre las representaciones *regexp* y los DFA.
- Similarlmente, para las CFGs y los PDAs, ambos son útiles para mostrar propiedades relacionadas con los lenguajes libres del contexto.

Overview

- Además, los PDAs, siendo "algorítmicos," son más fáciles de usar cuando argumentamos que un lenguajes debe ser CFL.
- Ejemplo: Es más fácil ver cómo un PDA puede reconocer paréntesis balanceados; (no tan fácil en CFG).
- Debemos mostrar que, en realidad, CFG's y PDA's son equivalentes.

Convirtiendo una CFG a PDA

- Sea L = L(G).
- Construimos un autómata de pila P tal que L(P) = L.
- P tiene:
  - Un estado q.
  - Símbolos input = terminales de G.
  - Símbolos stack = todos los símbolos de G.
  - Símbolo stack inicial = símbolo inicial de G.

Intuición acerca de P

- Dado el input w, P pasará por una derivación *leftmost* de w desde el símbolo inicial S.
- Dado que P no puede saber cuál es esta derivación, ni siquiera cuál es el final de w, utiliza el no determinismo para "adivinar" la producción a utilizar en cada paso.

Intuición acerca de P

- En cada paso, P representa una *forma sentencial izquierda* LSF (*left-sentential form*) (paso de una derivación *leftmost*).
- Si el stack de P es α, y P ha consumido una parte x de su input, entonces P representa la forma left-sentential xα.
- Cuando el stack sea vacío, el input consumido es una cadena en L(G).

Función de Transición de P

1. $\delta(q, a, a) = (q, \epsilon)$. (Reglas *Tipo 1*)
   - Este paso no cambia el LSF representado, sino que "mueve" la responsabilidad de *a* de la pila a la entrada consumida.
2. Si $A \rightarrow \alpha$ es una producción de G, luego $\delta(q, \epsilon, A)$ contiene (q, α). (Reglas *Tipo 2*)
   - Adivinar una producción para A y representar el siguiente LSF en la derivación.

Prueba $L(P) = L(G)$

- Debemos mostrar que
  $$(q, wx, S) \vdash^* (q, x, \alpha)$$
  para cualquier x, si y solo si, $S \Rightarrow^*_{lm} w\alpha$.
- Parte 1: "solo si" es una inducción sobre el número de pasos realizados por P.
- Base: 0 pasos.
  - Entonces $\alpha = S$, $w = \epsilon$, y $S \Rightarrow^*_{lm} S$ es una producción válida.

Inducción (parte $\Leftarrow$)

- Considere n movimientos de P:

$$(q, wx, S) \vdash^* (q, x, \alpha)$$

y asuma que la hipótesis de inducción para secuencias de n-1 movimientos.

- Hay dos casos, dependiendo de si el ultimo movimiento usó una regla de del Tipo 1 o Tipo 2.

Uso de una regla Tipo 1

- La secuencia de movimientos debe ser de la forma
  $$(q, yax, S) \vdash^* (q, ax, a\alpha) \vdash (q, x, \alpha),$$
  donde $ya = w$.
- Usando la hipótesis de inducción, aplciada a los primeros n-1 pasos, se tiene
  $$S \Rightarrow^*_{lm} ya\alpha.$$
- Como $ya = w$, tenems entonces $S \Rightarrow^*_{lm} w\alpha$.

Uso de una regla Tipo 2

- La secuencia de movimientos debe ser de la forma

  $$(q, wx, S) \vdash^* (q, x, A\beta) \vdash (q, x, \gamma\beta),$$

  donde A -> γ es una producción y $\alpha = \gamma\beta$.

- Usando la hipótesis de inducción aplicada a los primeros n-1 pasos, tenemos

  $$S \Rightarrow^*_{lm} wA\beta.$$

- Luego, $S \Rightarrow^*_{lm} w\gamma\beta = w\alpha$.

Prueba (parte $\Rightarrow$)

- También debemos mostrar que si

$$S \Rightarrow^*_{lm} w\alpha,$$

entonces

$$(q, wx, S) \vdash^* (q, x, \alpha).$$

- Hacemos una inducción sobre el número de pasos en la derivación *leftmost*.
- Las ideas son similares a la parte $\Leftarrow$.

Prueba – Final

- Ahora que tenemos $(q, wx, S) \vdash^* (q, x, \alpha)$, para cualqueir x, si y solo si, $S \Rightarrow^*_{lm} w\alpha$.
- En particular, hagamos $x = \alpha = \epsilon$.
- Entonces, $(q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$, si y solo si, $S \Rightarrow^*_{lm} w$.
- Esto quiere decir que, $w \in L(P)$, si y solo si, $w \in L(G)$.

Convertir de PDA a CFG

- Ahora, supongamos que L = L(P).
- Construirmos una CFG G tal que L = L(G).
- Intuición: G tendrá variables que generan exactamente las entradas que hacen que P tenga el efecto de quitar un símbolo de pila X mientras pasa del estado p al q.
  - P nunca cae por debajo de esta X mientras hace este movimiento.

Variables de G

- Las variables de G son de la forma [pXq].
- Esta variable genera todas y sólo aquellas cadenas w, tales que
$$(p, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon).$$
- Además, añadimos un símbolo inicial S, del cual hablaremos luego.

Producciones de G

- Cada producción para [pXq] viene de un movimiento del autómata P en el estado p con símbolo de stack X.
- Caso simple: $\delta(p, a, X)$ contiene (q, ϵ).
- Entonces la producción es $[pXq] \rightarrow a$.
  - Observe que *a* puede ser símbolo input ó ϵ.
- Aquí, [pXq] genera *a*, ya que leer *a* es una manera de extraer X del stack e ir de p a q.

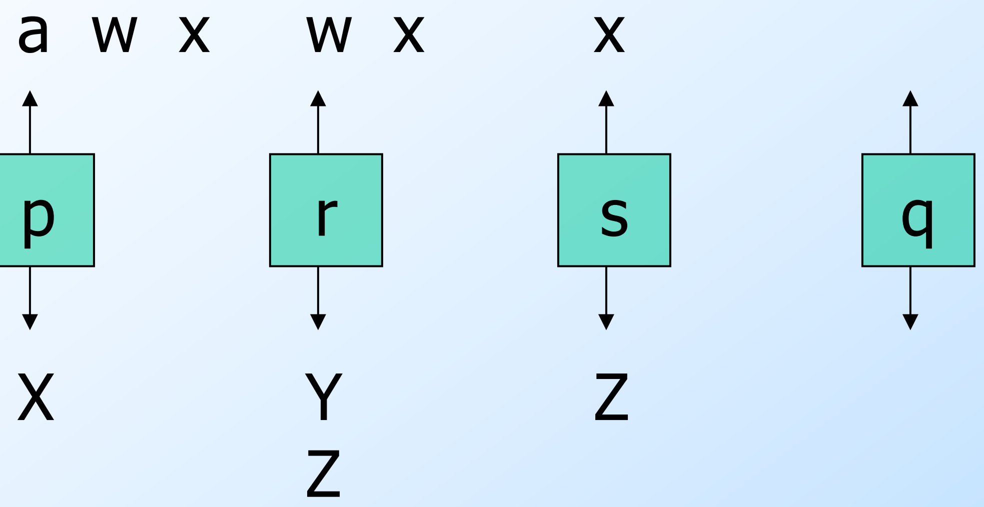
Producciones de G

- Segundo caso: $\delta(p, a, X)$ contiene (r, Y) para algún estado r y símbolo Y.
- G tiene una producción $[pXq] \rightarrow a[rYq]$.
  - Podemos borrar X del stack e ir de p hacia q al leer *a* (entrando en el estado r y reemplazando la X por Y) y luego leer alguna w que extrae P del stack y va de r a q borrando del stack la Y.
- Nota: $[pXq] \Rightarrow^* aw$, siempre que $[rYq] \Rightarrow^* w$.

Producciones de G

- Tercer caso: $\delta(p, a, X)$ contiene (r, YZ), para algún estado r y símbolos Y y Z.
- G tiene una producción $[pXq] \rightarrow a[rYs][sZq]$.
- Ahora, P reemplaza X por YZ en el stack.
- Para lograr el efecto de borrar la X en el stack, P debe borrar Y, yendo del estado r a otro estado s, y luego borrar la Z, yendo de s al estado q.

Ejemplo de la acción de P



Producciones de G

- Concluimos la prueba del tercer caso :
- Ya que no conocemos es estado s, debemos generar una colección de producciones:

  $$[pXq] \rightarrow a[rYs][sZq]$$

  para todos los estados s.
- $[pXq] \Rightarrow^* awx$, siempre que $[rYs] \Rightarrow^* w$ and $[sZq] \Rightarrow^* x$.

Producciones de G

- Caso general:
- Suponga que $\delta(p, a, X)$ contiene a $(r, Y_1 \ldots Y_k)$, para algún estado r y símbolos $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$, con $k \geq 3$.

- Generamos la colección de producciones $[pXq] \rightarrow a[rY_1s_1][s_1Y_2s_2]\ldots[s_{k-2}Y_{k-1}s_{k-1}][s_{k-1}Y_kq]$

Fin de la prueba

- Podemos mostrar que
  $$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$$
  si y sólo si, $[q_0Z_0p] \Rightarrow^* w$.
  - (La prueba se resume a dos inducciones.)
- El estado p puede ser cualquiera.
- Así, agregamos a G otra variable nueva S, el símbolo inicial, y añadimos producciones $S \rightarrow [q_0Z_0p]$, para cada estado p.