Decidibilidad y Computabilidad

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación **(Aula 25) 07.noviembre.2022**

Decidibilidad

Computabilidad

Otros modelos

Clases de Complejidad

- En la teoría de la computación, una *clase de complejidad* es un conjunto de problemas computacionales de complejidad relacionada basada en recursos.
- Los dos recursos más comúnmente analizados son el **tiempo** y la **memoria**.

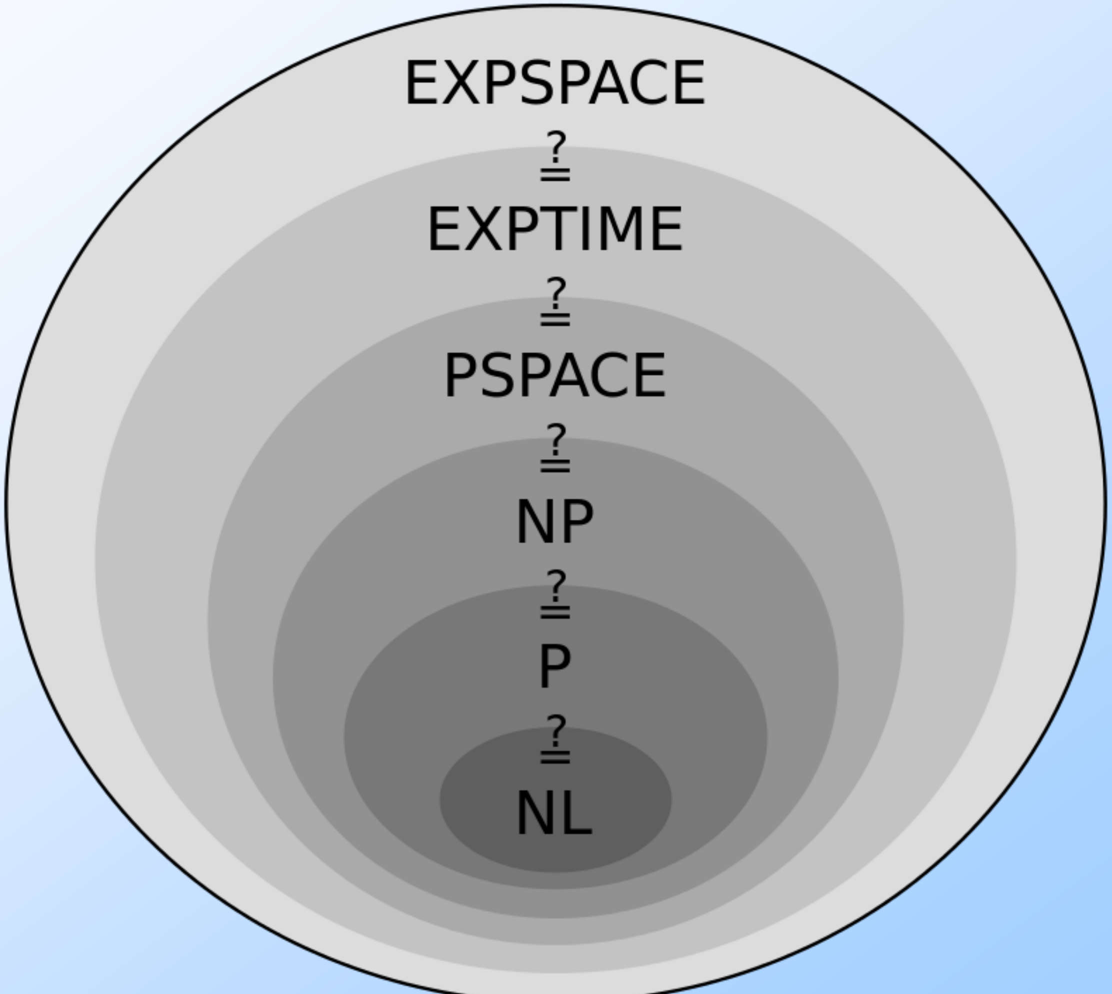
Clases de Complejidad

- **Clase de complejidad**: se define en términos de un tipo de problema computacional, un modelo de computación y un recurso acotado (e.g. tiempo o memoria).
- La mayoría de las clases de complejidad consisten en problemas de decisión que se pueden resolver con una máquina de Turing y se diferencian por sus requisitos de tiempo o espacio (memoria).

Clases de Complejidad

- Por ejemplo, la clase P: es el conjunto de problemas de decisión que se pueden resolver mediante una máquina de Turing determinista en tiempo polinomial.
- Existen muchas clases de complejidad definidas en términos de otros tipos de problemas (por ejemplo, problemas de conteo y problemas de funciones) y utilizando otros modelos de computación (e.g., MT probabilísticas, sistemas de prueba interactivos, circuitos booleanos y computadoras cuánticas).

Clases de Complejidad



Computabilidad

- La *teoría de la computabilidad*, o **teoría de la recursión**, es una rama de la lógica matemática, la informática y la teoría de la computación, iniciada en los 1930s con el estudio de las funciones computables y los grados de Turing.
- Preguntas básicas:
  - ¿Qué significa que una función sobre los números naturales sea computable?
  - ¿Cómo se pueden clasificar las funciones no computables en una jerarquía según su nivel de no computabilidad?

Computabilidad

- La *computabilidad* es la capacidad de resolver un problema de manera eficaz.
- La computabilidad de un problema está íntimamente ligada a la existencia de un algoritmo para resolver el problema.
- Algoritmo = modelo computacional. Hoy en día para “formalizar” la noción de algoritmo se construye una abstracción (modelo) de una máquina computacional.

Computabilidad

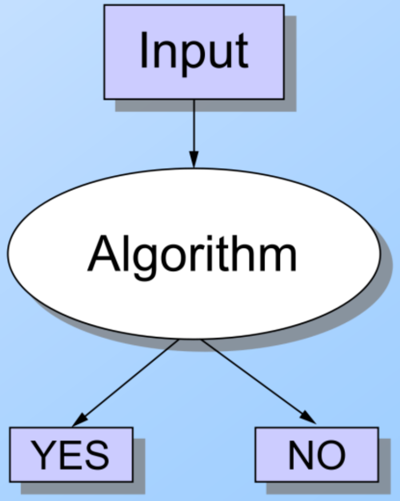
- Los modelos de computabilidad más ampliamente estudiados son:
  - Autómatas (DFA, NFA, PDA, …)
  - Máquinas de Turing
  - Funciones recursivas μ
  - Cálculo lambda
  - Máquinas de Post
  - Máquinas registradoras
  - Máquinas de Turing multi-cinta
  - Máquinas de Turing probabilísticas
  - Computación cuántica

Problemas

- Hay dos tipos principales de problemas:
  - Problemas de decisión
  - Un problema de computar una función.
- Otros tipos de problemas incluyen:
  - problemas de búsqueda,
  - problemas de optimización.
- Uno de los objetivos de la teoría de la computabilidad es determinar qué problemas, o clases de problemas, pueden resolverse en cada modelo de computación.

Decidibilidad

- Un *problema de decisión* es un problema computacional que se puede plantear como una pregunta de sí o no a partir de los inputs.



- Un método para resolver un problema de decisión, dado en forma de algoritmo, se llama un **procedimiento de decisión**.
- Un problema de decisión que puede ser resuelto por un algoritmo se llama *decidible*.

Funciones Computables

- Las *funciones computables* son los objetos básicos de estudio en la **teoría de la computabilidad**.
- Son el análogo formalizado de la noción intuitiva de algoritmos, en el sentido que una función es computable si existe un algoritmo que puede hacer el trabajo de la función: calcular su output.

Funciones Computables

- La *computabilidad* de una función es una noción informal.
- Una forma de describirlo es decir que una función es computable si su valor puede obtenerse mediante un **procedimiento efectivo**.
- Una función $f : N^k \rightarrow N$ es *computable* si y sólo si hay un procedimiento efectivo que, dada cualquier k-tupla $\mathbf{x} \in N^k$ de números naturales, producirá el valor $f(\mathbf{x})$.

Funciones Computables

- Las máquinas de Turing tienen una caracterización (descripción) matemática precisa, y esto impone una limitante igualmente precisa sobre las funciones que pueden computar.
- Serán éstas las **funciones computables.** Identificamos al conjunto de funciones computables con el de las **efectivamente calculables**.

Computabilidad

Problemas de computar funciones:

Potencia de las máquinas de estados finitos

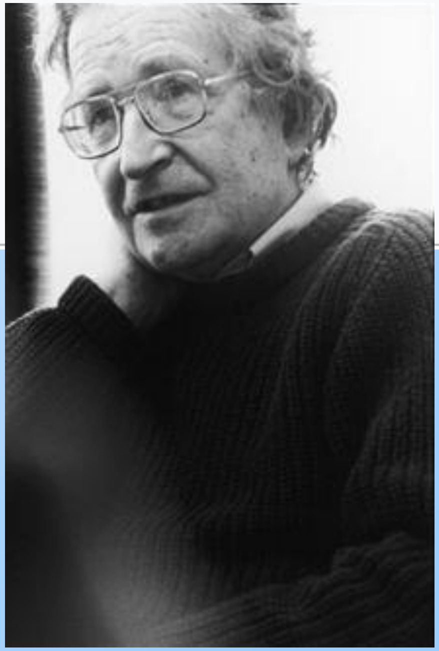
- *Lenguaje regular* = cualquier lenguaje que pueda ser aceptado por un autómata finito determinista (DFA).
- *Lenguaje libre de contexto* = cualquier lenguaje que pueda ser aceptado por un autómata de pila (PDA).
- *Lenguaje sensible al contexto* = cualquier lenguaje que pueda ser aceptado por un autómata linealmente acotado (LBA).
- *Lenguaje recursivamente enumerable* = aceptado por cualquier máquina de Turing.

Jerarquía de Chomsky

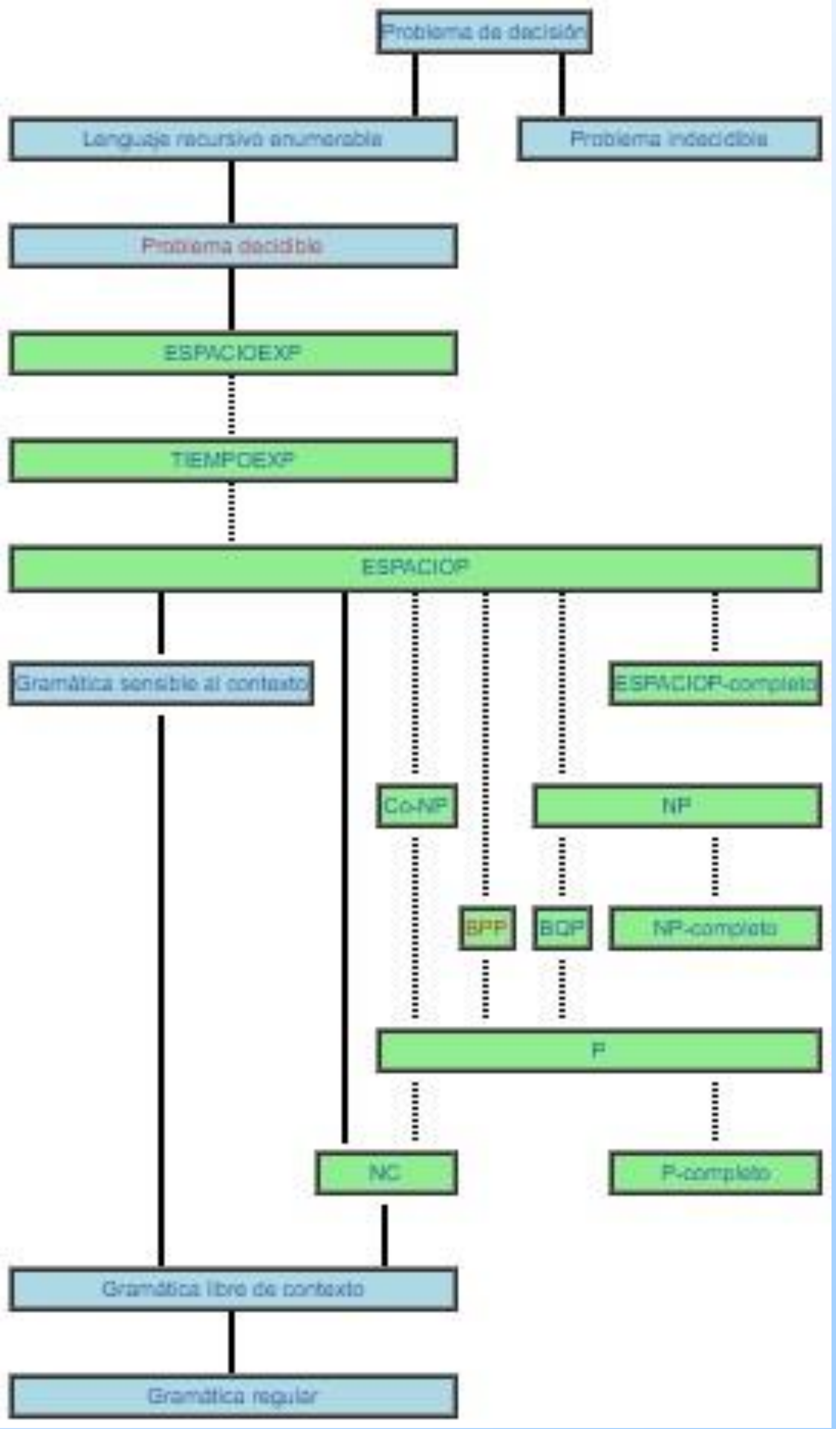
Tipo	Lenguaje	Autómata	Normas de producción de gramáticas	Ejemplos
0	recursivamente enumerable (LRE)	Máquina de Turing	$\alpha A\beta \to \delta$	$L = \{w \mid w$ describe una máquina de Turing$\}$
1	dependiente del contexto (LSC)	Autómata linealmente acotado	$\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$	$L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$
2	independiente del contexto (LLC)	Autómata con pila	$A \to \gamma$	$L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$
3	regular (LR)	Autómata finito	$A \to \mathrm{a}\gamma$ $A \to \mathrm{a}B$	$L = \{a^n \mid n \geq 0\}$

Significado de los símbolos:

- a = terminal
- A, B = no terminal
- α, β, γ = cadena de terminales y/o no terminales
  - α, β, δ = cadena posiblemente vacía
  - γ = cadena no vacía



- Clasificación de las gramáticas
- (Tipo 0, tipo1, tipo2, tipo 3).


Problema de decisión
Lenguaje recursivo enumerable
Problema indecidible
Problema decidible
ESPACIOEXP
TIEMPOEXP
ESPACIOP
Gramática sensible al contexto
ESPACIOP-completo
Co-NP
NP
BPP
BQP
NP-completo
P
NC
P-completo
Gramática libre de contexto
Gramática regular

Tesis de Church-Turing

- En la teoría de la computabilidad, la *tesis de Church-Turing* (también conocida como tesis de la computabilidad, tesis de Turing-Church, conjetura de Church-Turing, tesis de Church, conjetura de Church y tesis de Turing) es una tesis sobre la naturaleza de funciones computables.

- Establece que una función sobre los números naturales puede calcularse mediante un método efectivo si y solo si es computable por una máquina de Turing.

Tesis de Church-Turing

- La tesis de Church-Turing conjetura que no existe un modelo efectivo de computación que pueda calcular más funciones matemáticas que una máquina de Turing.

- Hoy en día, los cientistas de la computación han imaginado muchas variedades de hiperordenadores (*hypercomputers*), modelos de computación que van más allá de la computabilidad de Turing:
  - Random Turing machines,
  - quantum models, …

Otros modelos de computación

- Autómatas (DFA, NFA, PDA, …)
- Máquinas de Turing
- Funciones recursivas μ
- Cálculo lambda

- Máquinas de Post
- Máquinas registradoras
- Máquinas de Turing multi-cinta
- Máquinas de Turing probabilísticas
- Computación cuántica

Cálculo Lambda

- El Cálculo λ es un sistema formal en lógica matemática para expresar el cálculo basado en la abstracción de funciones y la aplicación mediante el enlace y la sustitución de variables.
- Es un modelo universal de computación que se puede usar para simular cualquier máquina de Turing. Introducido por Alonzo Church (1930s).

Cálculo Lambda

- Consiste en construir términos lambda y realizar operaciones de reducción sobre ellos.
- Reglas:

1) **Variable**: **E:=x** **x**
2) **Abstracción** (definición de función): **λx.E**
   (E es un término lambda)
   (E = expresión)
3) **Aplicación**: $\mathbf{E_1\ E_2}$
   (aplicamos la función E_1 al argumento E_2)

Cálculo Lambda

Junto con dos reglas de reducción:

- Conversión α (*α-Conversion*):

$$(\lambda x\ .\ M[x]) \rightarrow (\lambda y\ .\ M[y])$$

cambia de nombre las variables ligadas en la expresión. Se utiliza para evitar colisiones de nombres.

- Reducción β (*β-Reduction*):

$$((\lambda x\ .\ M)\ E) \rightarrow (M[x:=E])$$

reemplazando las variables vinculadas con la expresión del argumento en el cuerpo de la abstracción.

Ejemplo: Cálculo Lambda

- El cálculo lambda puro no posee funciones built-in. Evaluamos la siguiente expresión:

  (+ (* 5 6) (* 8 3))

- Aquí, no podemos comenzar con aplicar '+' ya que éste sólo opera sobre números. Hay dos expresiones reducibles: (* 5 6) y (* 8 3).

  - **(+ (* 5 6) (* 8 3))**
  - **(+ 30 (* 8 3))**
  - **(+ 30 24)**
  - **= 54**

Ejemplo: Cálculo Lambda

Reducción β:

- Es necesario una regla de reducción que permita manejar los lambdas

- **(λx . * 2 x) 4**
- **(* 2 4)**
- **= 8**