Máquinas de Turing
(*Turing Machines*)

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación **(Aula 21) 17.octubre.2022**

Definición

Ejemplos

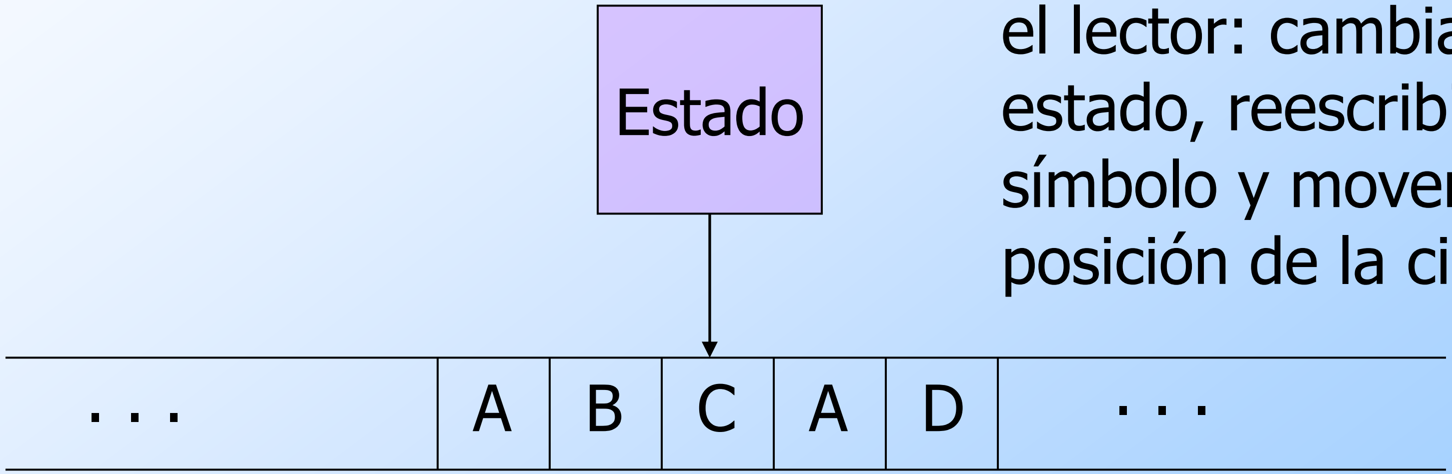
Funciones computables

Máquinas de Turing

- El propósito de la teoría de las máquinas de Turing es probar que ciertos lenguajes específicos no tienen algoritmo.
- Las reducciones se utilizan para demostrar que las preguntas más comunes son indecidibles.

Máquinas de Turing

Acción: basada en el estado y el símbolo de la cinta bajo el lector: cambiar de estado, reescribir el símbolo y moverse una posición de la cinta.



Una cinta infinita con espacios (cuadrados) y símbolos elegidos de un alfabeto finito.

¿Por qué Máquinas de Turing?

- ¿Por qué no trabajar con programas (de C o de Python) o algo parecido?
- Respuesta: Podríamos, pero es más fácil probar propiedades sobre las Máquinas de Turing, porque son simples.
  - Y sí, son igual de poderosas que cualquier computador.
    - Además, tienen memoria infinita.

¿Por qué no usar Autómatas?

- En principio, podríamos usarlos, pero no es constructivo.
- Los modelos de programación no se pueden construir bajo memoria limitada.
  - Podríamos “comprar más memoria”.
- Los autómata finitos son vitales al nivel base (verificación).
  Pero no a nivel generalización.

Máquinas de Turing

- Una Máquina de Turing se describe por:
  1. Un conjunto finito de *estados* (Q).
  2. Un *alfabeto de entrada* (Σ).
  3. Un *alfabeto de cinta* (Γ; contiene a Σ).
  4. Una *función de transición* (δ).
  5. Un *estado inicial* ($q_0 \in Q$).
  6. Un *símbolo blanco* ($B \in \Gamma - \Sigma$).
     - Toda la cinta, excepto el input está en blanco.
  7. Un conjunto de *estados finales* ($F \subseteq Q$).

Convenciones

- a, b, c, … son símbolos input.
- …, X, Y, Z son símbolos cinta.
- …, w, x, y, z son cadenas de símbolos input.
- α, β,… son cadenas de símbolos cinta.

Función de Transición

- δ: $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times D$ toma dos argumentos:
  1. Un estado, q en Q.
  2. Un símbolo de cinta Z en Γ.
- $\delta(q, Z)$ está indefinido, o es una tripla de la forma (p, Y, D), con:
  - $p \in Q$ un estado,
  - $Y \in \Gamma$ un símbolo de cinta,
  - $D \in \{L, R\}$ una *dirección*, (*Left* ó *Right*).

Acciones de una MT

- Si $\delta(q, Z) = (p, Y, D)$ entonces, en el estado q, leyendo el símbolo Z (en el lector de la cinta), la máquina de Turing hace lo siguiente:
  1. Cambia al estado p.
  2. Reemplaza Z por Y en la cinta.
  3. Mueve una posición el lector de la cinta, en la dirección D.
     - D = L: se mueve a la izquierda; D = R; a la derecha.

Ejemplo: Máquina de Turing

- Construimos una máquina de Turing que lee el input hacia la deracha, buscando un 1.
- Si encuentra uno, lo modifica a 0, va al estado final f, y termina.
- Si alcanza un símbolo blanco, lo cambia a 1 y se mueve hacia la izquierda.

Ejemplo: Máquina de Turing

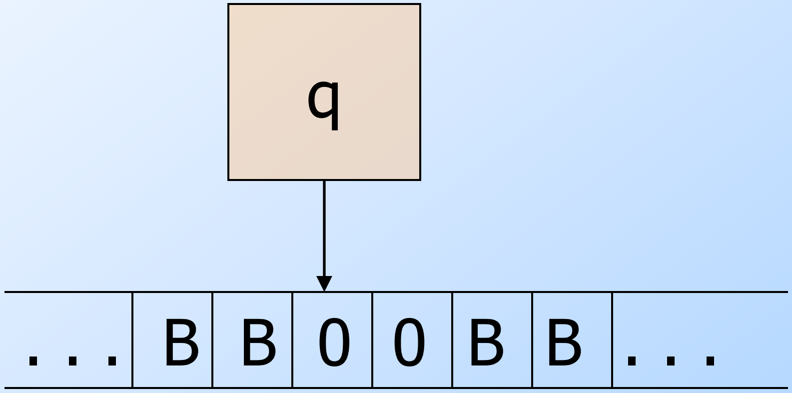
- Estados: $Q = \{q \text{ (inicial)}, f \text{ (final)}\}$.
- Símbolos input: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Símbolos cinta: $\Gamma = \{0, 1, B\}$. ($B = ␣$)
- Función de Transición:
  - $\delta(q, 0) = (q, 0, R)$.
  - $\delta(q, 1) = (f, 0, R)$.
  - $\delta(q, B) = (q, 1, L)$.

Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

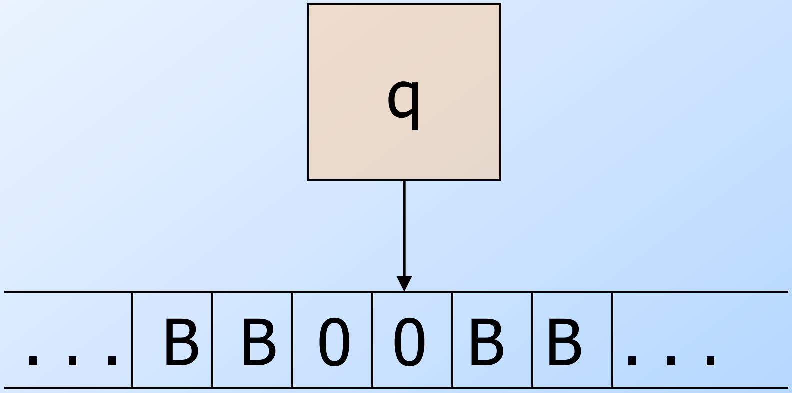


Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

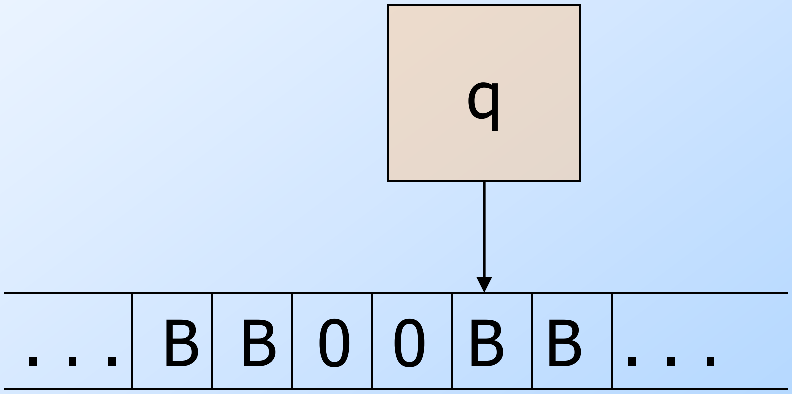


Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

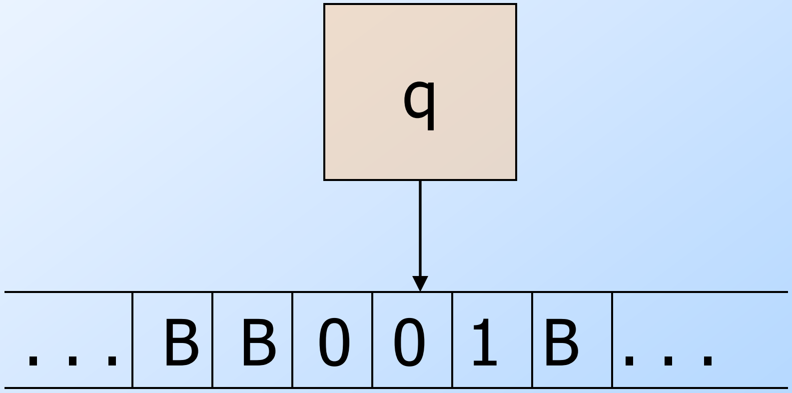


Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

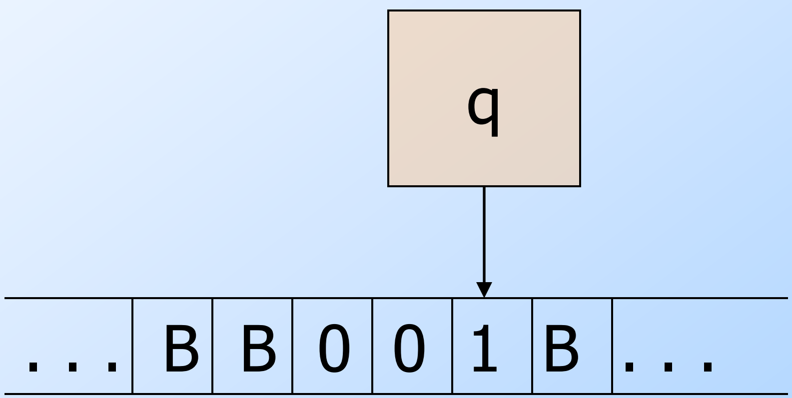


Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

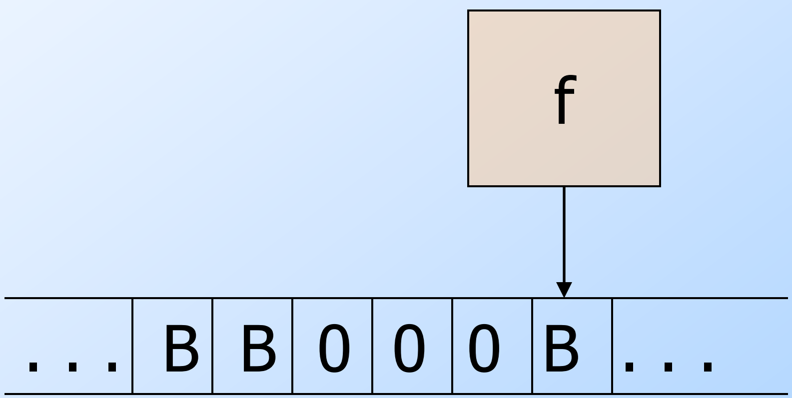


Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

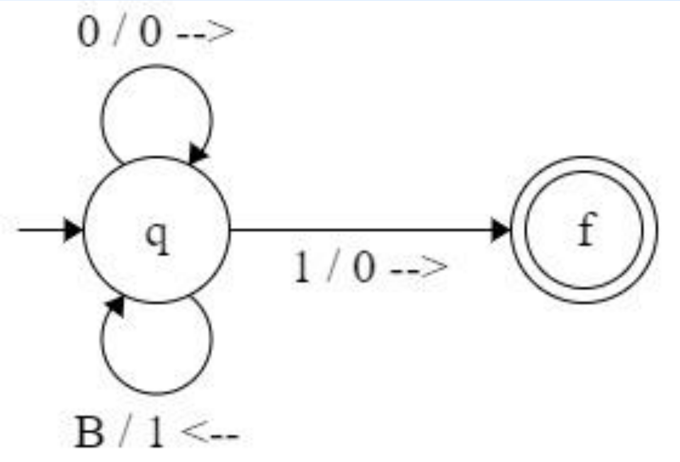


No ha más movidas posibles. La máquina para y acepta.

Tabla de Transiciones

	Símbolo		
Estado	**0**	**1**	**B**
q	(q, 0, R)	(f, 0, R)	(q, 1, L)
f	-	-	-

Diagrama de Transiciones



Descripciones Instantáneas

- Como la cinta es infinita, se representan solo los símbolos entre los B's (a veces se pueden incluir algunos B's) y
- se incluye un símbolo especial para indicar la posición del lector cinta.
- Por ejemplo:

$$\alpha\ q\ \beta\ =\ X_1 X_2 \ldots X_{i-1}\ q\ X_i X_{i+1} \ldots X_n$$

  representa una descripción instantánea donde:
  - q es el estado de la maquina de Turing
  - la cabeza de la cinta está viendo al i-ésimo símbolo a la izquierda
  - $X_1 X_2 \ldots X_n$ es el pedazo de cinta entre los símbolos más a la izquierda y más a la derecha que no son vacíos.

Descripciones Instantáneas

- Usamos la misma notacion de descripción instantánea que en los autómatas de pila: $\vdash$ y $\vdash^*$.
  - $\vdash$ "se convierte en un movimiento”,
  - $\vdash^*$ "se convierte en cero o más movim.”
- Ejemplo: Los movimientos de la MT anterior son
  $q00 \vdash 0q0 \vdash 00q \vdash 0q01 \vdash 00q1 \vdash 000f$

Definición Formal de $\vdash$

1. Si $\delta(q, Z) = (p, Y, R)$, entonces escribimos:

   $$\alpha qZ\beta \vdash \alpha Yp\beta$$

   Si Z es el símbolo blanco B, entonces

   $$\alpha q \vdash \alpha Yp$$

1. Si $\delta(q, Z) = (p, Y, L)$, entonces escribimos:
   - Para cualquier X, $\alpha XqZ\beta \vdash \alpha pXY\beta$
   - Además, $qZ\beta \vdash pBY\beta$

Ejemplo:

- Las descripciones instantáneas para el ejemplo anterior son:

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$	q00	$\vdash$	0q0
$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$		$\vdash$	00q
$\delta(q, B) = (q, 1, L)$		$\vdash$	0q01
$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$		$\vdash$	00q1
$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$		$\vdash$	000f
		$\vdash$	000

- Así, q000 $\vdash^*$ 000.

Ejemplo 2:

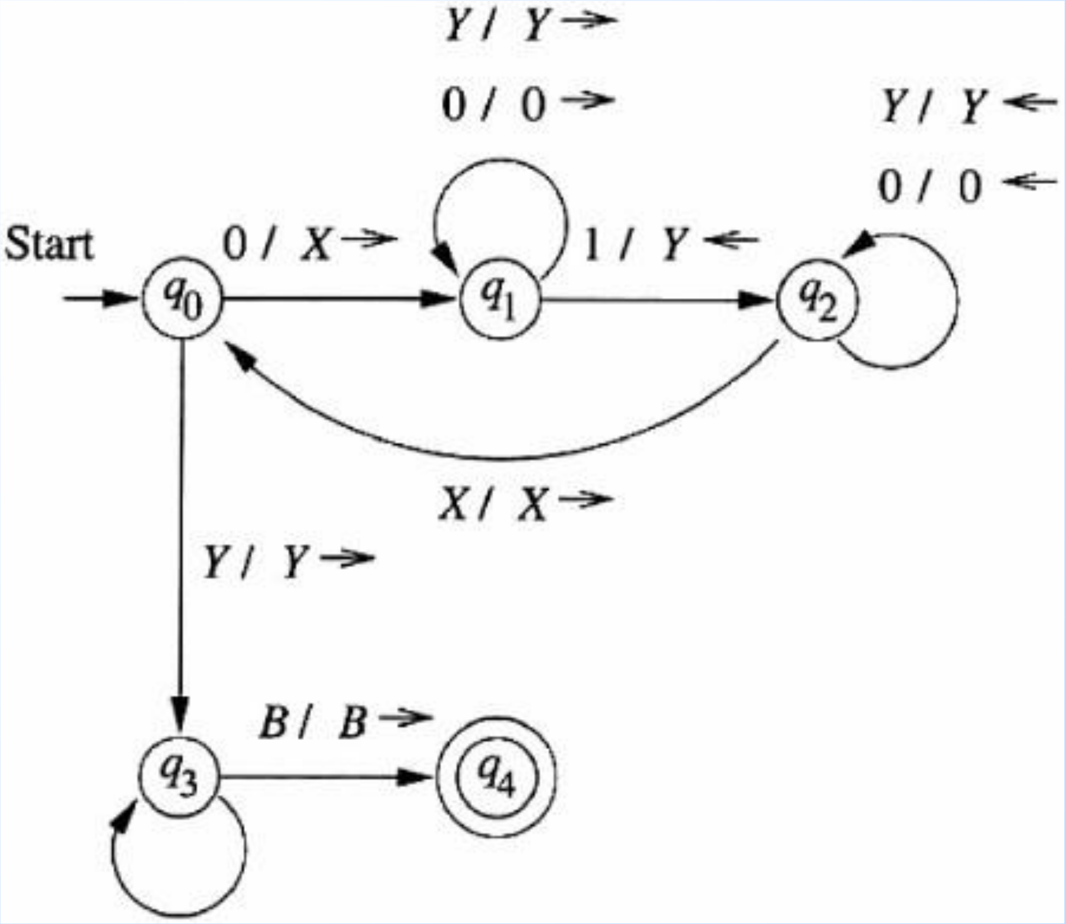
- Construimos una máquina de Turing que acepta las cadenas $\{0^n 1^n: n \geq 1\}$.
- Estados: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$.
- Símbolos input: $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Símbolos cinta: $\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$.
- Estado inicial: q_0
- Estados de aceptación: $F = \{q_4\}$.

Ejemplo 2:

- Función de Transición:

	Símbolo				
Estado	**0**	**1**	**X**	**Y**	**B**
q0	(q1, X, R)	-	-	(q3, Y, R)	-
q1	(q1, 0, R)	(q2, Y, L)	-	(q1, Y, R)	-
q2	(q2, 0, L)	-	(q0, X, R)	(q2, Y, L)	-
q3	-	-	-	(q3, Y, R)	(q4, B, R)
q4	-	-	-	-	-

Ejemplo 2:



Ejercicio: w = 0011.

Ejemplo 2:

- Para la cadena w = 0011, las transiciones son:

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, R)$	$q_0 0011 \vdash$	$Xq_1 011$
$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, R)$	$\vdash$	$X0q_1 11$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, L)$	$\vdash$	$Xq_2 0Y1$
$\delta(q_2, 0) = (q_2, X, L)$	$\vdash$	$q_2 X0Y1$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, R)$	$\vdash$	$Xq_0 0Y1$
$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, R)$	$\vdash$	$XXq_1 Y1$
$\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, R)$	$\vdash$	$XXYq_1 1$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, 1, L)$	$\vdash$	$XXq_2 YY$
$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, L)$	$\vdash$	$XXq_2 YY$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, R)$	$\vdash$	$Xq_2 XYY$
$\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, R)$	$\vdash$	$XXq_0 YY$
$\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, R)$	$\vdash$	$XXYq_3 Y$
$\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, R)$	$\vdash$	$XXYYq_3 B$
$\delta(q_3, B) = (q_4, B, R)$	$\vdash$	$XXYYBq_4$

Lenguajes de una MT

- Una máquina de Turing define un lenguaje por estados de aceptación.
  - $L(M) = \{w: q_0w \vdash^* I$, con I una descripción instantánea con estado final$\}$.
- Alternativamente, una máquina de Turing define un lenguaje mediante paro.
  - $H(M) = \{w: q_0w \vdash^* I$, si ya no hay movidas posibles desde la descripción $I\}$.

Equivalencia de Paro y Aceptación

1. Si $L = L(M)$, entonces existe una máquina de Turing M' tal que
$$L = H(M').$$
2. Si $L = H(M)$, entonces existe una máquina de Turing M'' tal que
$$L = L(M'').$$

Prueba de (1): Aceptación --> Paro

- Modificar M para definir M' como sigue:
   1. Para cada estado de aceptación de M, remover cualquier transición, así M' para en ese estado.
   2. Evitar que M' pare de forma accidental.
      - Introducir un nuevo estado s, que corre a la derecha infinitamente; esto es $\delta(s, X) = (s, X, R)$ para todo símbolo X.
      - Si q no es estado de aceptación, y $\delta(q, X)$ es indefinida, entonce $\delta(q, X) = (s, X, R)$.

Prueba de (2): Paro --> Aceptación

- Modificar M para definir M” como sigue:
  1. Introducir un nuevo estado f, el único estado de aceptación de M”.
  2. f no posee transiciones.
  3. Si $\delta(q, X)$ es indefinida para cualquier estado q y símbolo X, la definimos como $\delta(q, X) = (f, X, R)$.

Lenguajes Recursivamente Enumerables

- Hemos visto que las clases de lenguajes definidos por máquinas de Turing que usan estado final o paro son las mismas.
- Esta clase de lenguajes se denomina *lenguajes recursivamente enumerables*.
- El término en realidad es anterior a las máquinas de Turing y se refiere a otra noción de cálculo de funciones.

Lenguajes Recursivamente Enumerables

- Un *algoritmo* es una máquina de Turing M para la que está garantizado que para, ya sea que acepte o no.

- Si L = L(M) para alguna máquina de Turing M que es un algoritmo, decimos que L es un *lenguaje recursivo*.

Ejemplo: Lenguajes Recursivos

- Todo lenguaje libre de contexto CFL es un lenguaje recursivo.
  - Usar el algoritmo CYK.
- Todo lenguaje regular es un CFL (piense en su DFA como un autómata de pila que ignora su pila); por lo tanto, todo lenguaje regular es recursivo.
- “Casi todo” lo que uno cree es recursivo.

Ejemplo:

- Usamos el PDA del ejemplo anterior. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
(q, 000111, Z_0) &\vdash (q, 00111, XZ_0)\\
&\vdash (q, 0111, XXZ_0)\\
&\vdash (q, 111, XXXZ_0)\\
&\vdash (p, 11, XXZ_0)\\
&\vdash (p, 1, XZ_0)\\
&\vdash (p, \epsilon, Z_0)\\
&\vdash (f, \epsilon, Z_0)
\end{aligned}
$$

- Así, $(q, 000111, Z_0) \vdash^* (f, \epsilon, Z_0)$.
- Ejercicio: ¿Cómo quedaría si el input fuese 0001111?