Propiedades de Decisión de los Lenguajes Regulares

Alan Reyes-Figueroa
Teoría de la Computación (Aula 07a) 08.agosto.2022

Discusión general de “Propiedades”

El Lema de Bombeo

Pertenencia, Vacuidad, Finitud, Etc.

Propiedades Clases de Lenguajes

- Una *clase de lenguajes* es un conjunto de lenguajes.
  - Ejemplo: los lenguajes regulares.
  - Veremos muchos otros ejemplos.
- Las clases de lenguajes tienen dos tipos importantes de propiedades:
  1. Propiedades de decisión.
  2. Propiedades de cerradura.

Representación de Lenguajes

- Pueden ser formales o informales.
- Ejemplo (formal): representar un lenguaje mediante su *regex* o DFA que lo define.
- Ejemplo: (informal): mediante un enunciado prosaico o lógico acerca de sus cadenas:
  - $\{0^n1^n$: n es un entero no-negativo$\}$
  - "El conjunto de las cadenas que consisten de un cierto número de 0's seguido del mismo número de 1's."

Propiedades de Decisión

- Una *propiedad de decisión* para una clase de lenguajes es un algoritmo que toma una descripción formal del lenguaje (e.g., un DFA) y nos dice cuándo cierta propiedad de ese lenguaje se cumple o no.

- Ejemplo: Es el lenguaje L vacío?
  ¿Son los lenguajes L y M iguales?

Por qué prop. de decisión?

- Cuando hablamos de ejemplos de protocolos representados por DFAs, vimos que propiedades de un buen protocolo se relacionan con el lenguaje.

- Ejemplo: "El protocolo termina?" = "Es el lenguaje finito?"
- Ejemplo: "Puede el protocolo fallar?" = "Es el lenguaje no vacío?"

Por qué prop. de decisión?

- Otra razón es que para un lenguaje, nos gustaría tener la “menor” representación posible, e.g., DFA con estados mínimos o la menor *regex*.
- Si no podemos decidir “Son estos dos lenguajes el mismo?”
  - i.e., dos DFA’s definen el mismo lenguaje?

Entonces no podemos hallar el “menor”.

Propiedades de cerradura

- Una *propiedad de cerradura* de una clase de languajes establece que lenguajes en dicha clase, una operación (e.g., unión) entre ellos produce otro lenguaje en la misma clase.
- Ejemplo: los lenguajes regulares son cerrados mediante unión, concatenación, y la cerradura de Kleene.
  - Usar la representación *regex*.

Por qué prop. de cerradura?

1. Ayudan a construir representaciones.

2. Ayudan a mostrar (de manera informal) que un cierto lenguajes no pertenece a una clase.

Ejemplo: propiedad de cerradura

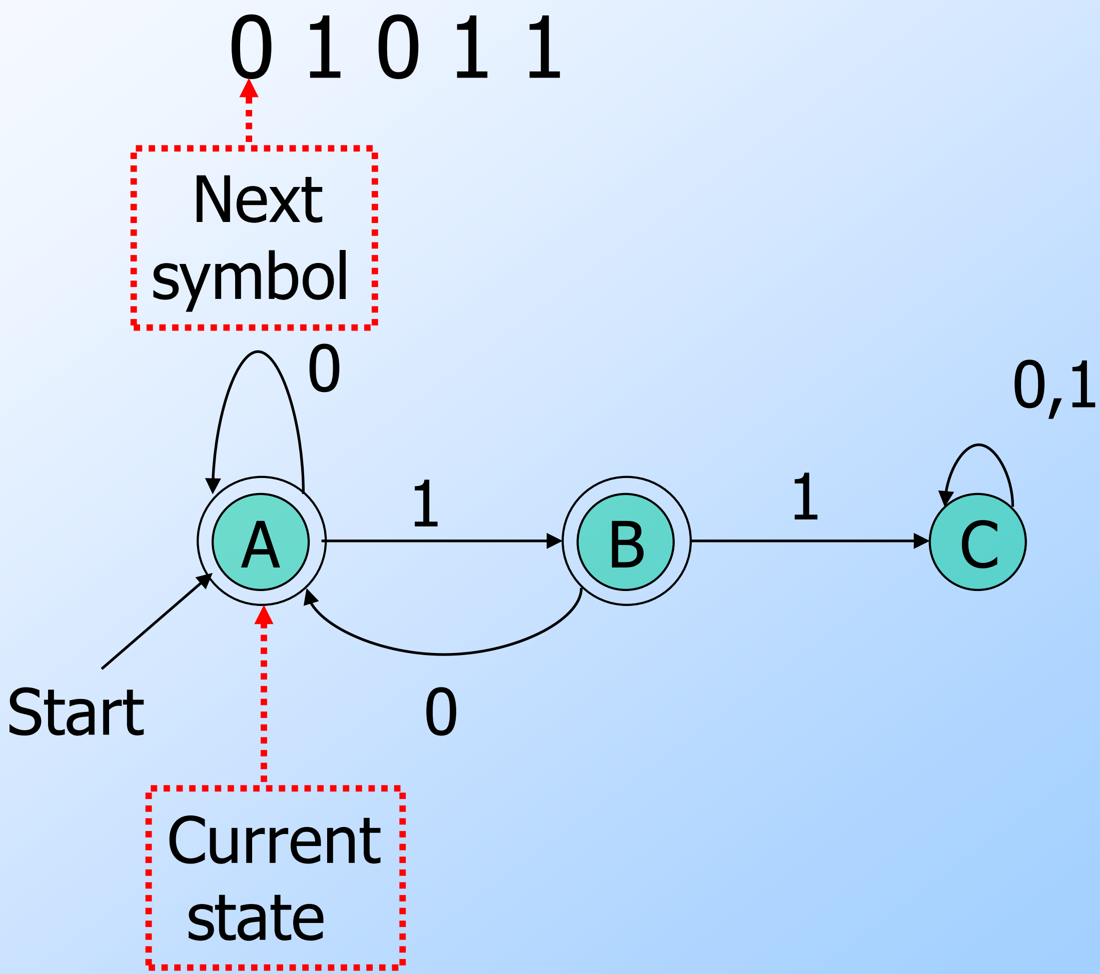
Veremos en un momento que el lenguaje $L_1 = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ no es regular.

- L_2 = {cadenas de 0's y 1's con el mismo número de 0's y de 1's} tampoco es regular (pero es más difícil de probar).
- Lenguajes regulares son cerrados bajo $\cap$.
- Si L_2 fuera regular, entonces $L_2 \cap L(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*) = L_1$ sería regular, pero no lo es.

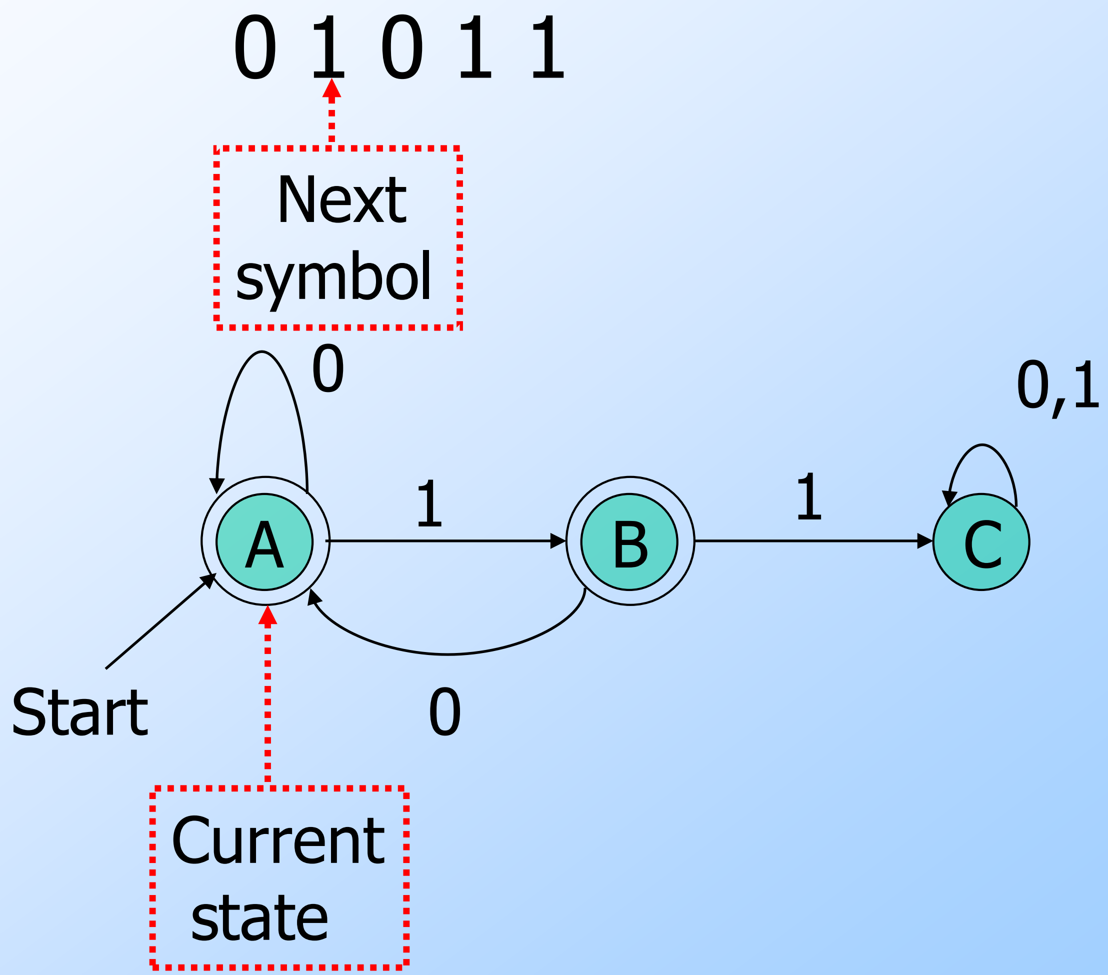
Pertenencia

- Nuestra primera propiedad de decisión es la pregunta: “está la cadena w en el lenguaje regular L?”
- Asumir que L es representado por un DFA, denotado M.
- Simular la acción del autómata M tomando como input en la secuencia de símbolos de w.

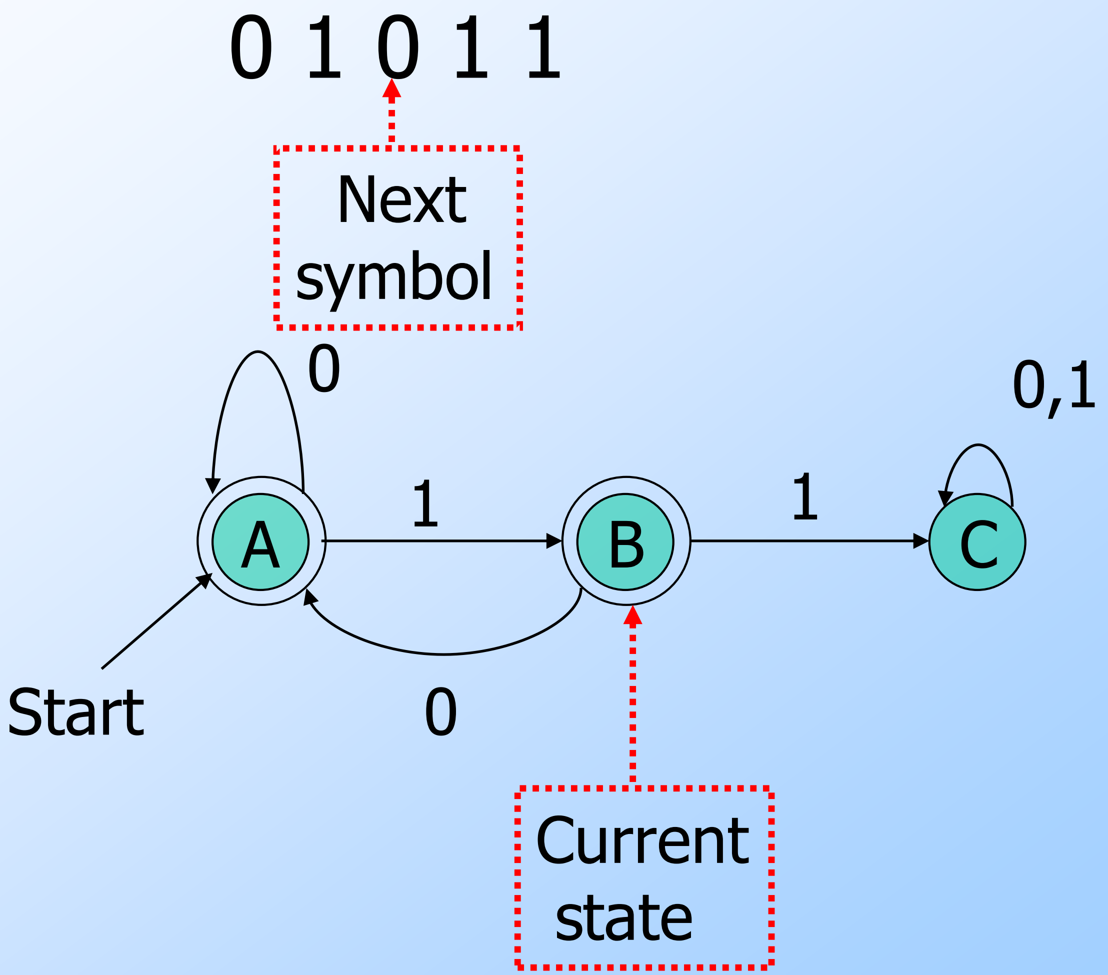
Ejemplo: Pertenencia



Ejemplo: Pertenencia

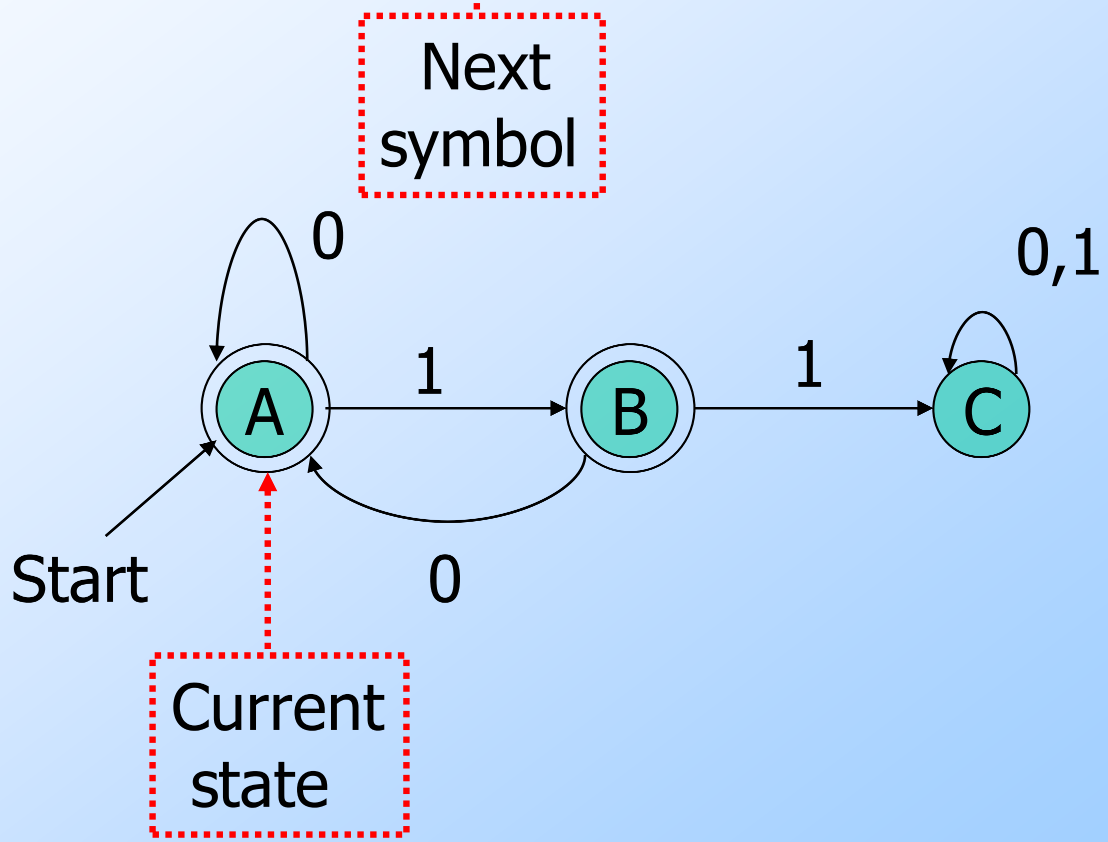


Ejemplo: Pertenencia

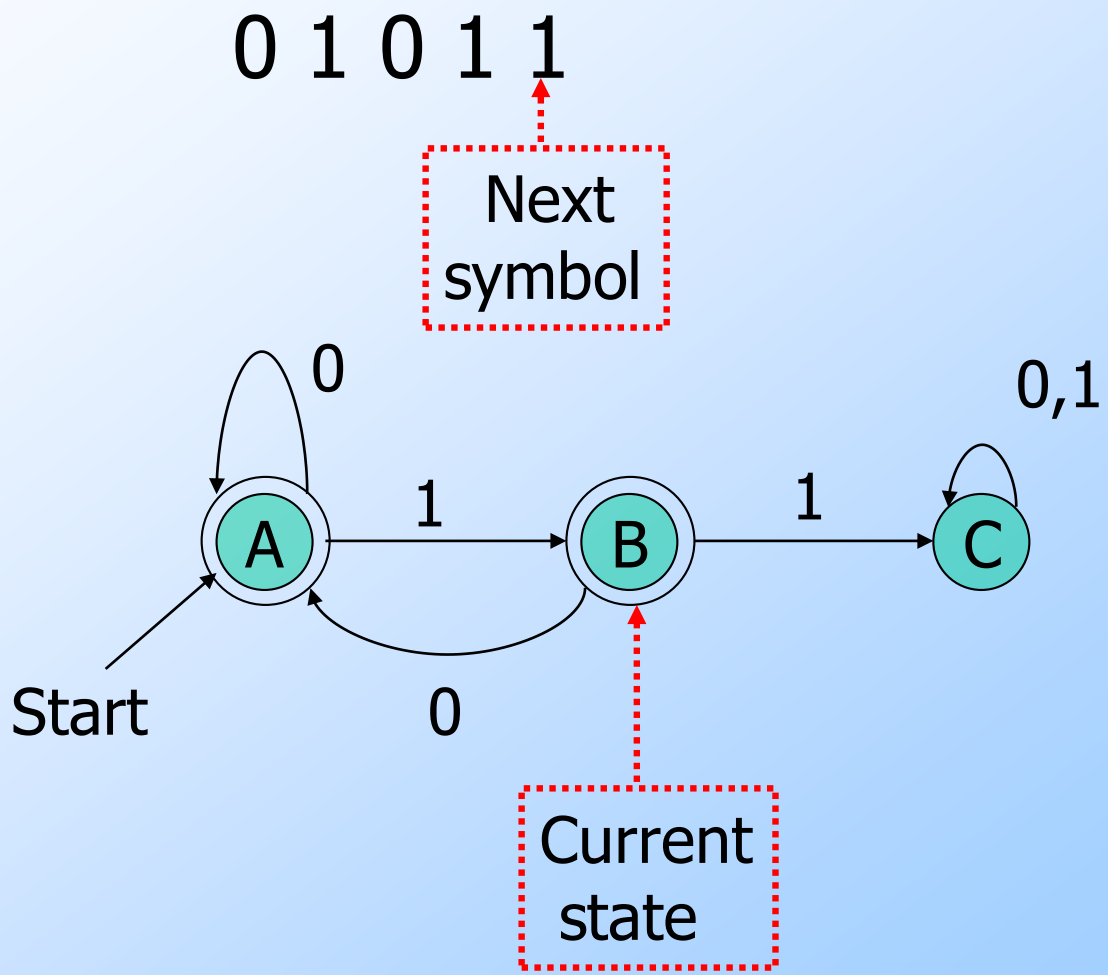


Ejemplo: Pertenencia

0 1 0 1 1

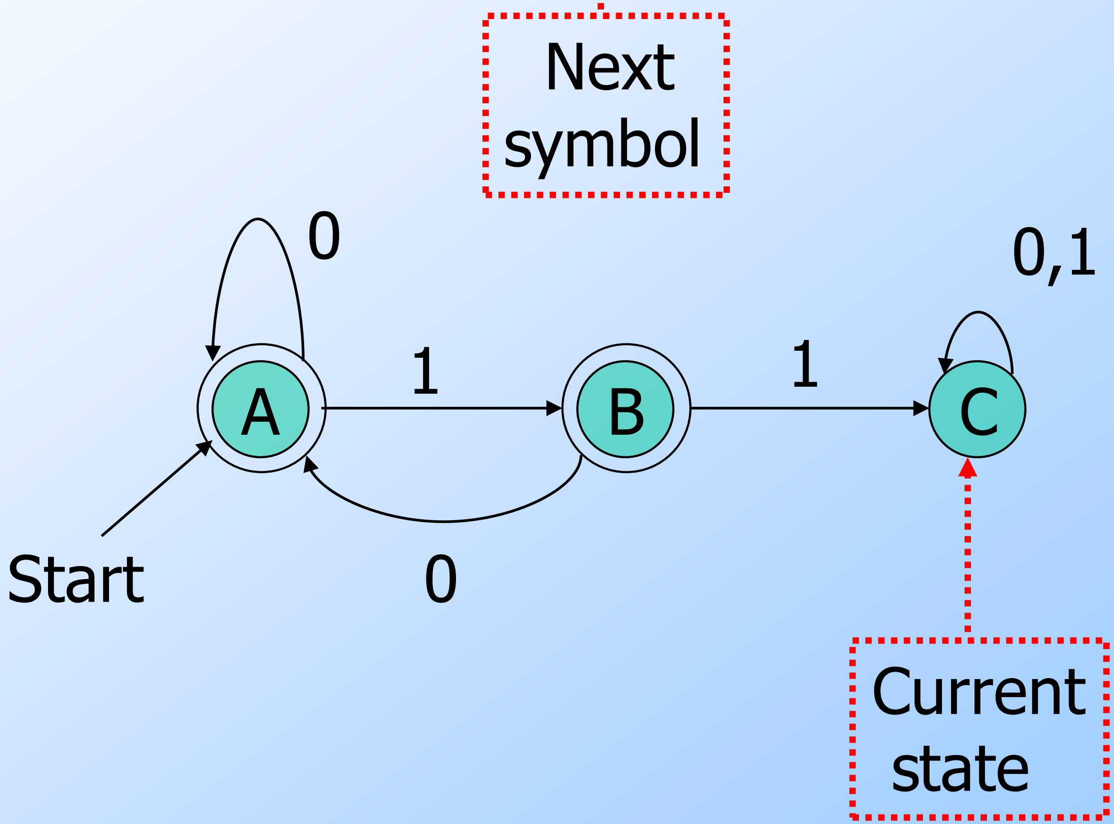


Ejemplo: Pertenencia



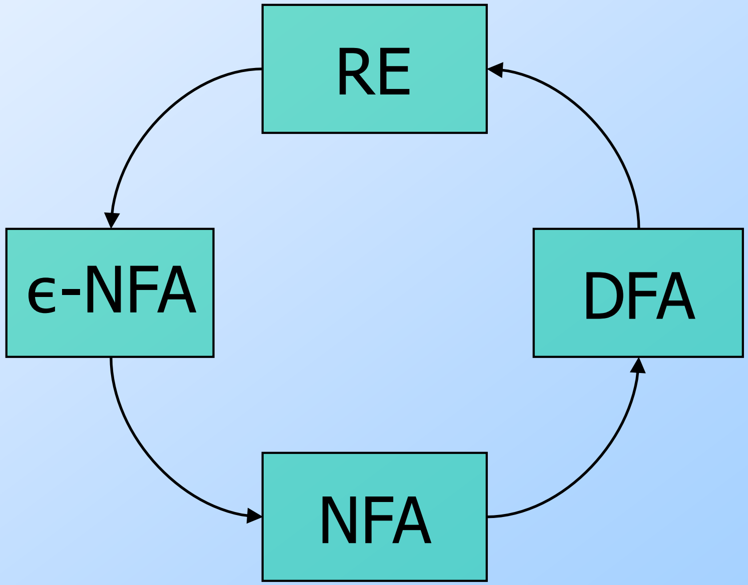
Ejemplo: Pertenencia

0 1 0 1 1



Y si L no es representado por un DFA?

- Recordemos que tenemos un ciclo de equivalencias para representar lenguajes regulares:



El problema de vacuidad

- Dado un lenguaje regular L, queremos saber si L contiene alguna palabra.
- Suponga que L se representa con un DFA.
- Construir el grafo de transiciones.
- Calcular el conjunto de estados alcanzables desde el estado inicial q_0.
- Si algún estado final q_F es alcanzable, sí hay palabras, caso contrario L = {}.

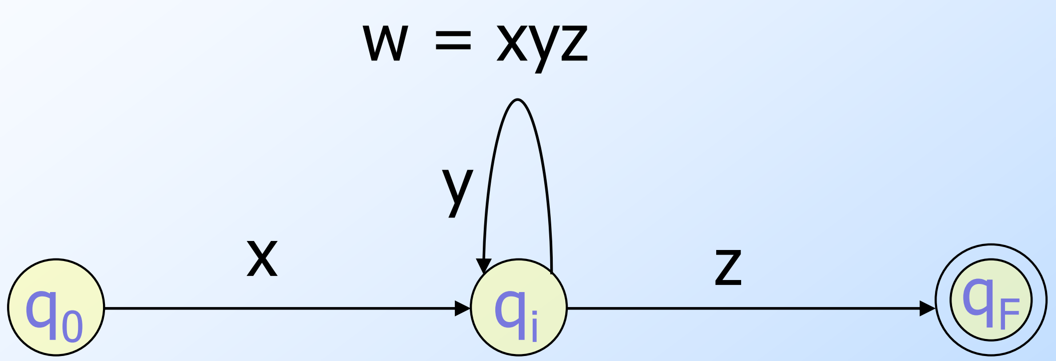
El problema de la finitud

- Dado un lenguaje regular L, es infinito?
- Comenzar con un DFA para L.
- Idea clave: si el DFA tiene *n* estados, y el lenguaje contiene cualquier cadena de longitud *n* o mayor, entonces L es infinito.
- Caso contrario, el lenguaje es finito.
  - Limitado a cadenas de longitud *n* o menor.

Prueba de la idea clave

- Si un DFA de n estados acepta una cadena w de longitud n o mayor, entonces debe haber un estado que aparece al menos dos veces en el trayecto de w desde el estado inicial q_0 al estado final q_F de w.
- Esto ya que hay al menos n+1 estados a lo largo del trayecto de w.

Prueba de la idea clave



→ xy^iz está en el lenguaje, para todo $i \geq 0$.

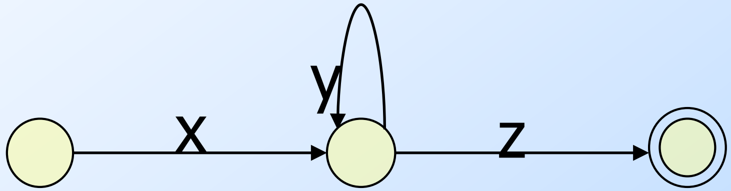
Como y no es la cadena ϵ, todas las cadenas xy^iz (hay infinitas de ellas) están en L.

Finitud

- Aún no tenemos un algoritmo.
- Hay un número infinito de cadenas de longitud > n. No podemos testarlas todas.
- Segunda idea clave: si hay una cadena de longitud $\geq$ n (= número de estados) en L, entonces debe haber una cadena de longitud entre n y 2n-1.

Pueba de la 2ª idea clave

- Recordemos:



- Podemos elegir y como el primer ciclo a lo largo del trayecto de w.
- Así, $|xy| \leq n$; en particular, $1 \leq |y| \leq n$.
- Luego, si w es de longitud 2n o mayor, hay una cadena de menor longitud en L que aún es de longitud n o más.
- Reducir hasta obtener algo en [n,2n-1].

Completamos el algoritmo de infinitud

- Verificar la pertenencia a L de todas las cadenas de longitudes entre n y 2n-1.
  - Si alguna es aceptada, entonces L es infinito. Caso contrario, L es finito.
- El peor algoritmo posible.
- Mejor idea: buscar la existencia de ciclos entre el estado inicial q_0 y final q_F.

Búsqueda de Ciclos

1. Eliminar los estados que no son alcanzables desde el estado inicial q_0.
2. Eliminar los estados que no llegan al estado final q_F.
3. Verificar si el grafo de transiciones remanente posee algún ciclo.

El Lema de Bombeo (*Pumping Lemma*)

- En lo anterior casi hemos probado, de forma accidental, un resultado que es muy útil para mostrar que ciertos lenguajes no son regulares.

- Este es llamado el *lema de bombeo para lenguajes regulares*.

Lema de Bombeo

Número de estados del DFA para L

Para todo lenguaje regular L,

existe un entero $n \geq 1$, tal que

para toda cadena $w \in L$ de longitud $\geq n$

podemos escribir $w = xyz$, donde:

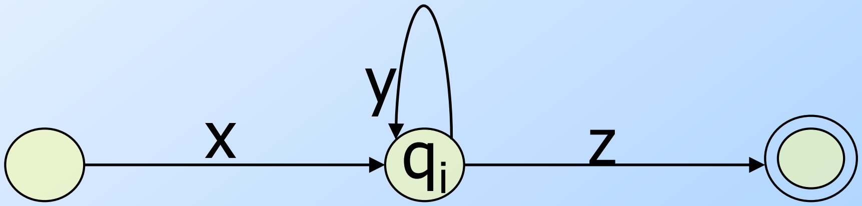
1. $|xy| \leq n$.
2. $|y| > 0$.
3. Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in L$.

y corresponde al primer ciclo en el trayecto de w

Prueba de Lema de Bombeo

1. Tomamos n = número de estados del DFA para L
2. Tomamos w ϵ L de longitud ≥ n
3. Por el principio de las casillas en el trayecto de w hay ≥ n+1 estados, de modo que al menos un estado q_i se repite.
4. Tome y la subcadena de w del ciclo en q_i

w = xyz



(Observe que y tiene longitud al menos 1, no es la cadena vacía).

5. → xy^iz está en el lenguaje, para todo i $\geq$ 0.
6. Como y no es la cadena ϵ, todas las cadenas de la forma xy^iz (hay infinitas de ellas) están en L.

Ejemplo: Lema de Bombeo

Vamos a mostrar que $L = \{0^k 1^k : k \geq 1\}$ no es un lenguaje regular.

- Suponga que sí es. Entonces existe un $n \geq 1$ para L que cumple el lema de bombeo.
- Tome $w = 0^n 1^n \in L$. Podemos escribir $w = xyz$, donde $|xy| \leq n$, $|y| > 0$. Esto implica que:
  1. $y \neq \varepsilon$.
  2. x, y consisten sólo de 0's
- Pero, por el lema de bombeo, la cadena $xyyz \in L$.
- Pero esta cadena tiene (n+1) 0's y n 1's. Absurdo!