Autómatas Finitos No Deterministas

Alan Reyes-Figueroa

Teoría de la Computación (Aula 04) 20.julio.2022

No determinismo
Construcción de subconjuntos
ϵ-Transiciones

No determinismo

- Un *autómata finito no determinista* tiene la habilidad de 'estar' en varios estados simultáneamente.
- Las transiciones pueden hacerse desde un estado a un conjunto de estados.

No determinismo

- Comenzar en el estado inicial.
- Se acepta una cadena si alguna secuencia de transiciones lleva a algún estado final.
- Intuitivamente: los AFN siempre "adivinan correctamente"

Ejemplo: Movidas en un tablero

- Estados = casillas.
- Inputs:

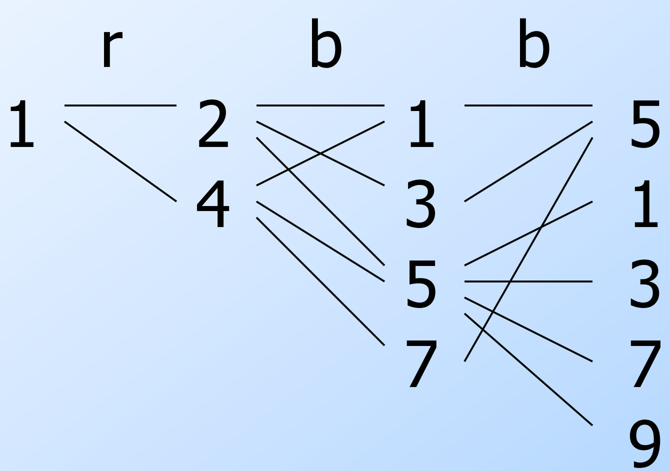
  r = (mover a un cuadro rojo adyacente)

  b = (mover a cuadro negro adyacente).
- Estado inicial y estado final en esquinas opuestas.

Ejemplo: Tablero

1	2	3
4	5	6
7	8	9

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5



← Se acepta

Definición de AFN

- Un autómata finito no determinista $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$, consiste de
  - Un conjunto finito de *estados* (K).
  - Un *alfabeto* de entrada (Σ).
  - La *relación de transición*

$$\Delta \subseteq K \times (\Sigma \cup e) \times K.$$

  - Un *estado inicial* (s ó q_0).

La ‘función’ de transición en un AFN

- $\Delta(q, a)$ es un conjunto de estados.
- Se extiende a cadenas en forma inductiva:
- Base: $\delta(q, \epsilon) = \{q\}$
- Inducción: Si $w = xa$, donde $|x|=|w|-1$

$$\delta(q, wa) = \bigcup_{p \in \delta(q,w)} \delta(p, a)$$

Lenguaje de un AFN

- Una cadena w es aceptada por un autómata finito no determinista si $\delta(q_0, w)$ contiene al menos un estado final.
- El lenguaje L(M) de un autómata no determinista es el conjunto de las cadenas aceptadas.

Ejemplo: Tablero

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- Para el autómata del tablero, vimos que la cadena *rbb* es aceptada.
- Si la entrada consiste sólo de *b*'s, el conjunto de estados accesibles se alterna entre {5} y {1,3,7,9}, de modo que sólo cadenas no vacías con un número par de *b*'s se aceptan.
- Qué ocurre con las cadenas con *r* ?

Equivalencia de AFD’s y AFN’s

- Un autómata determinista AFD puede transformarse en un autómata no determinista que acepta el mismo lenguaje.

- Para ello, si $\delta_D(q, a) = p$, definimos el autómata no determinista por

$$\Delta(q,a) = \delta_N(q, a) = \{p\}.$$

Equivalencia

- Recíprocamente, para cada autómata no determinista AFN, existe un autómata determinista que acepta el mismo lenguaje.
- La prueba se basa en la *construcción de subconjuntos*.
- El número de estados del AFD puede crecer exponencialmente.

Construcción de subconjuntos

- Dado un autómata no determinista $M = (K, \Sigma, \Delta=\delta_N, s, F)$, vamos a construir un autómata determinista equivalente tal que:
  - estados = 2^K (conjunto potencia de K).
  - alfabeto = Σ.
  - estado inicial = $\{q_0\}$.
  - estados finales = todos los que intersectan F.

Importante !!

- Los estados del AFD tienen *etiquetas* que son conjuntos de K (estados del AFN).
- Por ejemplo: Como estado del AFD, una expresión {p,q} debe enternderse como un único símbolo.
- Analogía: una clase de objetos cuyos valores son subconjuntos de objetos de otra clase.

Construcción de subconjuntos

- La función de transición δ_D del AFD se define por:

$$\delta_D(\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \Delta(q_i, a)$$

- Ejemplo: Construiremos el autómata determinista equivalente para el ÁFN del tablero.

Ejemplo: Tablero

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}		
	{5}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obs!: Aquí estamos haciendo una construcción *incompleta* del AFD, donde sólo se construye un estado si es necesario.

Ejemplo: Tablero

		r	b
	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

	r	b
{1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}		
{2,4,6,8}		
{1,3,5,7}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}		
	{1,3,5,7}		
	{1,3,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}		
	{1,3,7,9}		
	{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

	r	b
→ 1	2,4	5
2	4,6	1,3,5
3	2,6	5
4	2,8	1,5,7
5	2,4,6,8	1,3,7,9
6	2,8	3,5,9
7	4,8	5
8	4,6	5,7,9
* 9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,7,9}		
{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
{1,3,5,7,9}		

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ejemplo: Tablero

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
*	{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
*	{1,3,5,7,9}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Prueba de la Equivalencia: Construcción de subconjuntos

- La prueba es 'casi inmediata'.
- Se muestra por inducción en $|w|$ que

$$\Delta(q_0, w) = \delta_D(\{q_0\}, w)$$

- Base: $w = \epsilon$:

$$\Delta(q_0, \epsilon) = \delta_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\}.$$

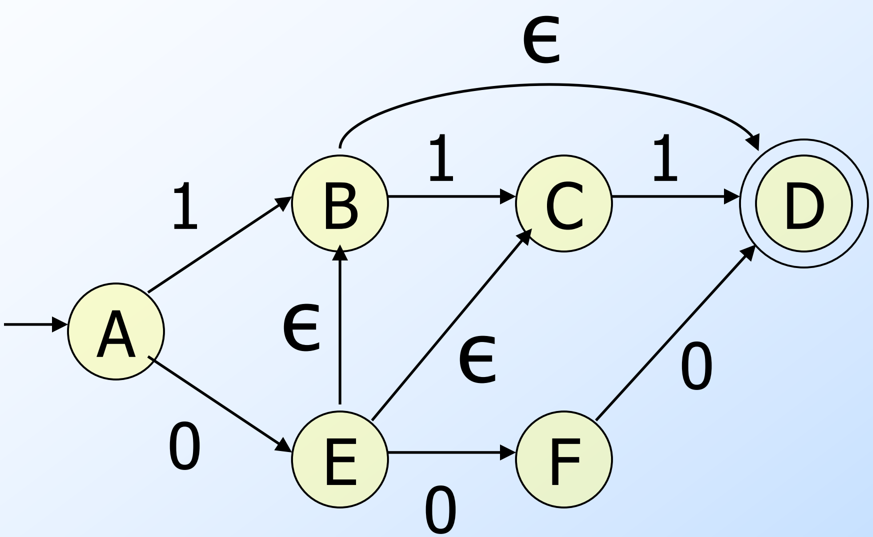
Paso Inductivo

- Asumir la hipótesis para cadenas de longitud < |w|.
- Si w = xa; la hipótesis vale para x.
- Sea $\Delta(q_0, x) = \delta_D(\{q_0\}, x) = S$.
- Sea $T = \bigcup_{p \in S} \Delta(p, a)$, la unión sobre S de todos los $\Delta(p, a)$.
- Luego, $\Delta(q_0, w) = \delta_D(\{q_0\}, w) = T$.

AFN’s con transiciones-ε

- En los autómatas no deterministas permitimos transiciones con entrada ϵ.
- Estas transiciones se hacen espontáneamente, sin ver el caracter de entrada.
- Se incluyen cuando se considere conveniente. (Aún así, esto no modifica el tipo de lenguajes aceptados.)

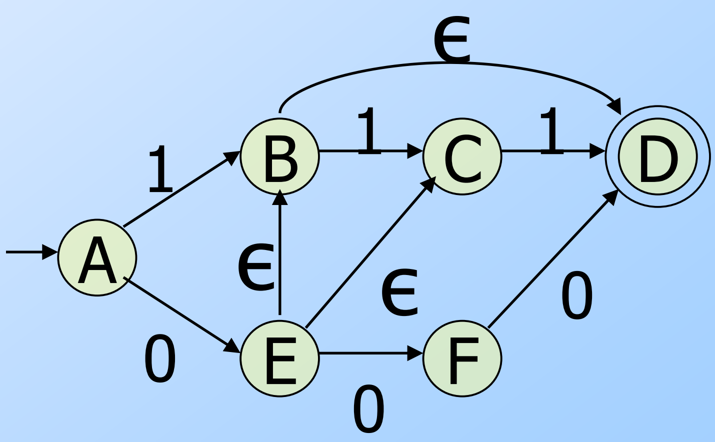
Ejemplo: ϵ-AFN



		0	1	ϵ
→	A	{E}	{B}	∅
	B	∅	{C}	{D}
	C	∅	{D}	∅
*	D	∅	∅	∅
	E	{F}	∅	{B, C}
	F	{D}	∅	∅

Cerradura de Estados

- CL(q) = conjunto de estados que pueden alcanzarse desde el estado q sól siguientes arcos ϵ.
- Ejemplo: CL(A) = {A};
  CL(E) = {B, C, D, E}.



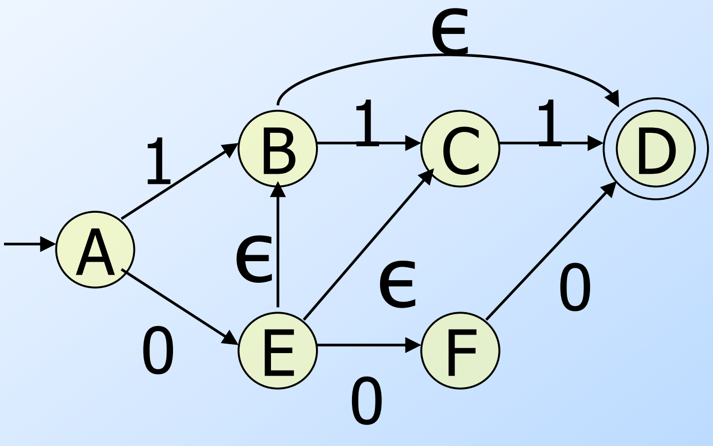
- Cerradura de un conjunto de estados:

$$CL(S) = \cup_{q \in S} CL(q).$$

Delta Extendida

- Intuición: $\hat{\delta}(q, w)$ es el conjunto de estados que pueden alcanzarse desde q siguiendo un camino *w*.
- Base: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = CL(q)$.
- Inducción: $\hat{\delta}(q, xa)$ se calcula como:
  1. Comenzar con $\hat{\delta}(q, x) = S$.
  2. Luego, $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{p \in S} CL(\hat{\delta}(p, a))$.

Ejemplo: Delta extendida



- $\hat{\delta}(A, \epsilon) = CL(A) = \{A\}$.
- $\hat{\delta}(A, 0) = CL(\{E\}) = \{B, C, D, E\}$.
- $\hat{\delta}(A, 01) = CL(\{C, D\}) = \{C, D\}$.
- El *lenguaje* de un ϵ-AFN es el conjunto de cadenas w tales que $\hat{\delta}(q_0, w)$ contiene algún estado final.