Repaso de probabilidad y estadística

Alan Reyes-Figueroa

Aprendizaje Estadístico (Aula 01) 16.enero.2026

Probabilidades

Construcción. Punto de partida: un experimento

- Resultado del experimento es $\omega \in \Omega$ $\rightsquigarrow$ *espacio muestral.*
- Interés en ciertos eventos A $\rightsquigarrow$ $\sigma-$*álgebra*
- Una probabilidad $\mathbb{P}$ es una función sobre ciertos eventos $\mathbb{P} : A \mapsto \mathbb{R}$.

Ejemplo 1
Experimento: lanzar un dado.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1..6]$
Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{2, 4, 6\}$	obtener un número par
$A_2 = \{3\}$	obtener 3
$A_3 = \{1, 2, 4, 5\}$	obtener un número no múltiplo de 3

Ejemplo 2
Experimento: lanzar dos dados.
$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\ldots,(5,6),(6,6)\}$
Probablemente aquí sea más simple representarlo como
$\Omega = \{(a,b) : a, b \in [1..6]\} = [1..6] \times [1..6]$

Algunos eventos

Representación	Evento
$A_1 = \{(1,6),(2,5),(3,4),\ldots,(6,1)\}$	que los dados sumen 7
$A_2 = \{(1,3),(3,1),\ldots,(6,3),(3,6)\}$	que aparezca al menos un 3

Otros espacios asociados: $\Omega_1 = [1..6]$, ¿Cuál es el mínimo de los dos dados?

Otros ejemplos (para pensar)

Especificar un espacio muestral para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda.
b) Lanzar una moneda hasta que aparezca "cruz".
c) Distancia recorrida por un automóvil con un litro de gasolina.
d) Señal de radio que se recibe durante dos segundos.
e) Juego entre tres jugadores: P, Q y R. El juego consiste en jugar partidas por parejas, comenzando P contra Q. Quien gane un partida juega con el otro jugador, hasta que uno de los jugadores gane dos partidas consecutivas, ganando entonces el juego.

Pregunta: ¿Cómo definir $\mathbb{P}$? ¿Cómo interpretarla?

Definición (Espacio de probabilidad)

*Un **espacio de probabilidad** es una estructura* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, donde*

- Ω *es un conjunto (no vacío). Los elementos* $\omega \in \Omega$ *se llaman eventos.*
- $\mathcal{F} \subseteq \Omega$ *es una* $\sigma-$*álgebra.*
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *es una medida de probabilidad.*

Definición

Una $\sigma-$***álgebra*** $\mathcal{F}$ *sobre un conjunto* Ω *es una colección de subconjuntos de* Ω *que satisface:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ *(es cerrada bajo complementos);*
- $A_i \in \mathcal{F}$, *para* $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ *(es cerrada bajo uniones enum).*

Definición

Una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *es una* ***medida de probabilidad*** *si*

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- *para cualquier colección enumerable de eventos exclusivos* $E_i \in \mathcal{F}$, *vale*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup E_i\Big) = \sum \mathbb{P}(E_i) \quad \textit{(enumerablemente aditiva).}$$

Axiomas

Axiomas de la probabilidad, introducidos por Kolmogorov en 1933.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de medida con $\mathbb{P}(E)$ la probabilidad de un evento $E \in \mathcal{F}$. Asumimos los siguientes supuestos para $\mathbb{P}$:

Axiomas

1. $\mathbb{P}(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{F}$ *(no-negativa).*

2. $\mathbb{P}(E)$ *es siempre finita, y* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(unitariedad).*

3. *Cualquier colección enumerable y mutuamente excluyente de eventos* $E_i \in \mathcal{F}$, *satisface*
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i), \qquad (\sigma\text{-aditiva}).$$

Propiedades

Si $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad sobre Ω, entonces

1. *(Monotonicidad) Si $A \subseteq B$ son eventos, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*
2. *(Conjunto vacío) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.*
3. *(Complemento) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, para todo evento $A \in \mathcal{F}$.*
4. *(Cotas para $\mathbb{P}$) Para todo evento $E \in \mathcal{F}$, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$.*
5. *$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

Consecuencias

1. (Monotonicidad) Si $A \subseteq B$ son eventos en $\mathcal{F}$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

   Prueba:
   Definamos $E_1 = A$, $E_2 = B - A$, y $E_i =$ para $i = 3, 4, \ldots$. Entonces, por σ-aditividad (axioma 3),
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$
   Como el lado izquierdo anterior es una suma de términos no-negativos (axioma 1), entonces
   $$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

Consecuencias

1. (Monotonicidad) Si $A \subseteq B$ son eventos en $\mathcal{F}$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

   <u>Prueba</u>:
   Definamos $E_1 = A$, $E_2 = B - A$, y $E_i =$ para $i = 3, 4, \ldots$. Entonces, por σ-aditividad (axioma 3),
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$
   Como el lado izquierdo anterior es una suma de términos no-negativos (axioma 1), entonces
   $$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A) + \sum_{i \geq 3} \mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(B).$$

Consecuencias

2. (Complemento) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, para todo evento $A \in \mathcal{F}$.

   Prueba:
   A y $A^c = \Omega - A$ forman una partición de Ω. Por σ-aditividad (axioma 3) y el axioma 2

   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

   luego $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

   Prueba:
   $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\Omega^c) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Consecuencias

4. $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$, para todo evento E.

   Prueba:

   $\mathbb{P}(E) \geq 0$ por el axioma 1. Además, $E \subseteq \Omega$, y la monotonicidad de $\mathbb{P}$ implican $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

5. (Principio de Inclusión-Exclusión) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

   Prueba:
   Observe que $\mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$ (por aditividad). Luego $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Similarmente, $\mathbb{P}(B - A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Ahora, $A \cup B$ es la unión disjunta de $A - B$, $B - A$ y $A \cap B$. Por aditividad,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Caso finito

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$.
Distribución de conteo o distribución uniforme: Corresponde a elegir un elemento al azar.
Para cada $A \subseteq \Omega$, se tiene

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = |A|/k.$$

En particular, sin $A_i = \{\omega_i\}$, entonces

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/k.$$

Caso general: Suponga que $\mathbb{P}(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Caso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Distribución uniforme:
Experimento: Elegir un número al azar de $[0, 2]$.
Tenemos $\Omega = [0, 2]$.
$A = [0, 1] \qquad \mathbb{P}(A) = 1/2.$
$B = [0.4, 1] \qquad \mathbb{P}(B) = 0.6/2 = 0.3.$

En general, para $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\int_A dx}{\int_\Omega dx}.$$

¿Se puede calcular $\mathbb{P}$ siempre? No.

- Se requiere que $\int_\Omega dx < \infty$.
- Tenemos que limitarnos a conjuntos donde $\int_A dx$ existe.