

## **VARIABLES LATENTES: NNMF**

ALAN REYES-FIGUEROA  
APRENDIZAJE ESTADÍSTICO

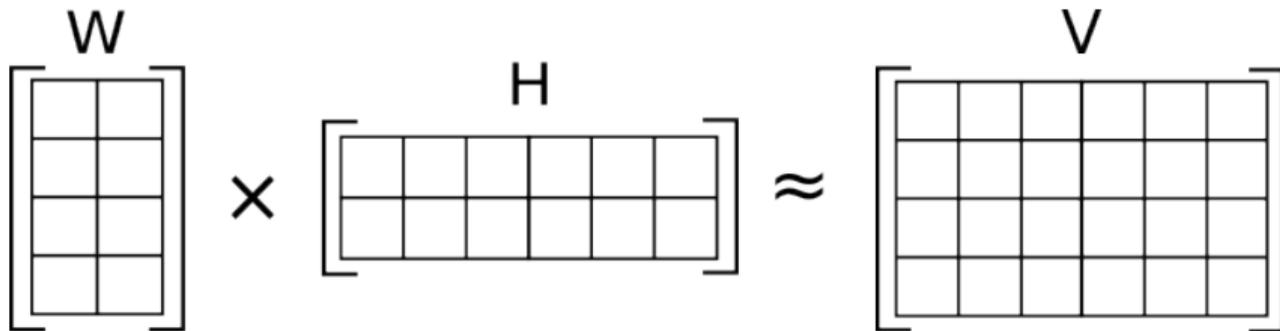
(AULA 10) 12.FEBRERO.2025

# NNMF

La Factoración de Matrices No-Negativas (NNMF) es otra estrategia para obtener variables latentes.

Sea  $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  una matriz de datos. El objetivo es descomponer  $\mathbb{X}$  como el producto de dos matrices con entradas no-negativas  $W \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $H \in \mathbb{R}^{r \times d}$

$$\mathbb{X} = WH,$$



El producto de las matrices matrices  $W$  y  $H$  se implementa de modo que cada columna de  $\mathbb{X}$  es una combinación lineal de las columnas en  $W$ , poderadas por los coeficientes proporcionados por las columnas de  $H$ . Esto es, cada columna de  $\mathbb{X}$  es

$$X_i = \mathbb{X}_i = W\mathbf{h}_i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

donde  $X_i$  es el vector de la  $i$ -ésima columna de  $\mathbb{X}$  y  $\mathbf{h}_i$  la  $i$ -ésima columna de  $H$ .

Lo que se pretende es que las dimensiones de las matrices factores  $W$  y  $H$  sea baja. Esto es, definimos y valor  $1 \leq r \leq d$ , típicamente  $r \ll d$  de modo que las matrices factores  $W$  y  $H$  cumplan

$$W \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad H \in \mathbb{R}^{r \times d}, \quad \text{y } \text{rank}(H) = \text{rank}(W) = r.$$

El problema de encontrar estas matrices de bajo rango  $W$  y  $H$  se resuelve mediante el problema de optimización

$$\min_{W,H} \|\mathbb{X} - WH\|_F^2, \quad \text{sueto a } W \geq 0, H \geq 0. \quad (1)$$

Se requieren técnicas de optimización tipo gradiente proyectado, métodos de punto interior, u otras técnicas avanzadas para tratar este problema.

En la práctica, se utilizan esquemas de gradiente proyectado alternado, esto es, resolvemos el problema (1) en dos pasos:

1. Fijar  $W_k$ , y resolver  $H_k = \operatorname{argmin}_{H \geq 0} \|\mathbb{X} - W_k H\|_F^2$ .
2. Fijar  $H_k$ , y resolver  $W_{k+1} = \operatorname{argmin}_{W \geq 0} \|\mathbb{X} - WH_k\|_F^2$ .

## Observaciones:

- NNMF tiene una estructura de clustering inherente: agrupa las columnas de  $\mathbb{X}$  en función de las componentes que encuentra en la factorización aproximada  $WH$ .
- Las columnas de  $W$  forman atributos o segmentos. Los coeficientes de  $H$  miden el grado de pertenencia a estos segmentos.
- Si además imponemos una restricción de ortogonalidad en  $H$ , es decir  $HH^T = I$ , la minimización (1) es equivalente al método de agrupamiento *k-means*.
- Cuando la restricción de ortogonalidad  $HH^T = I$  no se impone, la ortogonalidad se mantiene en gran medida, y la propiedad de agrupamiento también.
- Existen otras técnicas similares, cuya base es factorar la matriz  $\mathbb{X}$ , como el análisis de factores (FA), o el análisis semántico latente (LSA).
- Si la función de error es la divergencia Kullback-Leibler, NNMF es idéntico al análisis semántico latente probabilístico LSA o LDA.

## Ejemplo 1: Recomendaciones en compras.

|            | John | Alice | Mary | Greg | Peter | Jennifer |
|------------|------|-------|------|------|-------|----------|
| Vegetables | 0    | 1     | 0    | 1    | 2     | 2        |
| Fruits     | 2    | 3     | 1    | 1    | 2     | 2        |
| Sweets     | 1    | 1     | 1    | 0    | 1     | 1        |
| Bread      | 0    | 2     | 3    | 4    | 1     | 1        |
| Coffee     | 0    | 0     | 0    | 0    | 1     | 0        |

Number of purchases in category

# Ejemplos

## Ejemplo 1: Recomendaciones en compras.

|            | Fruits pickers | Bread eaters | Veggies |
|------------|----------------|--------------|---------|
| Vegetables | 0              | 0.04         | 2.74    |
| Fruits     | 1.93           | 0.15         | 0.47    |
| Sweets     | 0.97           | 0            | 0       |
| Bread      | 0              | 2.66         | 1.18    |
| Coffee     | 0              | 0            | 0.59    |

W matrix — segment perspective

|            | Fruits pickers | Bread eaters | Veggies |
|------------|----------------|--------------|---------|
| Vegetables | 0              | 0.04         | 2.74    |
| Fruits     | 1.93           | 0.15         | 0.47    |
| Sweets     | 0.97           | 0            | 0       |
| Bread      | 0              | 2.66         | 1.18    |
| Coffee     | 0              | 0            | 0.59    |

W matrix — category perspective

# Ejemplos

## Ejemplo 1: Recomendaciones en compras.

|                | John | Alice | Mary | Greg | Peter | Jennifer |
|----------------|------|-------|------|------|-------|----------|
| Fruits pickers | 1.04 | 1.34  | 0.55 | 0.26 | 0.89  | 0.9      |
| Bread eaters   | 0    | 0.6   | 1.12 | 1.36 | 0.03  | 0.07     |
| Veggies        | 0    | 0.35  | 0    | 0.34 | 0.77  | 0.69     |

H matrix

Pregunta: con esta información ¿Cómo hacer recomendaciones?

# Ejemplos

## Ejemplo 1: Recomendaciones en compras.

|            | John | Alice | Mary | Greg | Peter | Jennifer |
|------------|------|-------|------|------|-------|----------|
| Vegetables | 0    | 0.98  | 0.04 | 0.98 | 2.11  | 1.9      |
| Fruits     | 2    | 2.84  | 1.23 | 0.87 | 2.07  | 2.06     |
| Sweets     | 1.01 | 1.31  | 0.54 | 0.26 | 0.86  | 0.87     |
| Bread      | 0    | 2.01  | 2.99 | 4.01 | 0.99  | 1        |
| Coffee     | 0    | 0.2   | 0    | 0.2  | 0.45  | 0.41     |

Reconstructed  $X$  matrix — person perspective

Rankeamos la columna correspondiente a un usuario (columna  $h_i$ ). Las recomendaciones se hacen en función de este *score* indicado en los coeficientes de la columna  $h_i$ .

## Ejemplo 1: Recomendaciones en compras.

|                | John | Alice | Mary | Greg | Peter | Jennifer |
|----------------|------|-------|------|------|-------|----------|
| Fruits pickers | 1.04 | 1.34  | 0.55 | 0.26 | 0.89  | 0.9      |
| Bread eaters   | 0    | 0.6   | 1.12 | 1.36 | 0.03  | 0.07     |
| Veggies        | 0    | 0.35  | 0    | 0.34 | 0.77  | 0.69     |

H matrix

Pregunta: con esta información ¿Cómo hacer recomendaciones?

# Ejemplo

## Ejemplo 1: Compras en supermercado.

|           | Anahí | Babá | Cadú | Didí | Edú | Fabi |
|-----------|-------|------|------|------|-----|------|
| Vegetales | 0     | 1    | 0    | 1    | 2   | 2    |
| Frutas    | 2     | 3    | 0    | 1    | 2   | 2    |
| Dulces    | 1     | 1    | 0    | 0    | 1   | 1    |
| Pan       | 0     | 2    | 3    | 4    | 1   | 1    |
| Café      | 0     | 0    | 0    | 0    | 1   | 2    |
| Carne     | 0     | 0    | 2    | 1    | 2   | 0    |
| Lácteos   | 2     | 1    | 0    | 2    | 0   | 1    |
| Pastas    | 0     | 3    | 3    | 1    | 1   | 0    |
| Salsas    | 0     | 3    | 2    | 2    | 1   | 0    |

## Ejemplo 2: Opiniones sobre películas.

|                  | John | Alice | Mary | Greg | Peter | Jennifer |
|------------------|------|-------|------|------|-------|----------|
| Game of Thrones  | 5.0  | NaN   | 1.0  | NaN  | NaN   | NaN      |
| House of Cards   | NaN  | NaN   | NaN  | 7.0  | NaN   | 6.0      |
| Friends          | 6.0  | 4.0   | NaN  | 3.0  | 5.0   | 3.0      |
| Band of Brothers | 2.0  | 9.0   | NaN  | NaN  | NaN   | 9.0      |
| Breaking Bad     | NaN  | NaN   | NaN  | 9.0  | NaN   | 2.0      |

Imdb ratings (NaN — not rated)