Modelación y Simulación 2025

Lab 05

11.septiembre.2025

1. Implementar en Python una función que grafique el campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial de primer orden
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$
Como parámetros su algoritmo debe recibir la función f, los límites $xmin$, $xmax$, $ymin$, $ymax$ de la ventana que desea graficar, y parámetros $xstep$ y $ystep$ para indicar la separación en la que quiere subdividir su grid de puntos sobre los ejes x y y, respectivamente. Puede añadir parámetros adicionales que usted desee.

   También debe incluir algún parámetro que permita graficar entre el campo F asociado a la ecuación (1), o el campo unitario N equivalente.

   Para la salida, su función debe devolver una figura con el campo de direcciones requerido. Si usted lo desea, puede incorporar que su función grafique también las líneas de flujo o curvas solución de la ecuación diferencial.

   Sugerencia: Apoyarse de las funciones **numpy.linspace** para crear los rangos y subdivisiones en los ejes x y y. Usar la función **numpy.meshgrid** para generar la rejilla de puntos a graficar. Usar **matplotlib.pyplot.quiver** para construir el campo vectorial requerido. Puede usar la función **matplotlib.pyplot.streamplot** para graficar las líneas de flujo. Se sugiere implementar la construcción del campo a través de una función auxiliar
```
def F(x,y):
    return (expr1, expr2),
```
   donde `expr1` y `expr2` corresponden a las componentes del campo $F(x, y)$ que desea graficar.

   Ilustrar los resultados de su función graficando dos campos vectoriales de su elección.

2. Para las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizar métodos cualitativos para esbozar las soluciones de la EDO. Luego, resolver cada EDO con los métodos aprendidos en sus cursos pasados, para determinar una expresión de la solución general de cada EDO. Comparar la solución obtenida contra su solución esbozada. Discutir si coinciden las curvas solución.

   i) $y' = -xy$
   ii) $y' = xy$
   iii) $xdx + ydy = 0$
   iv) $ydx + xdy = 0$
   v) $\frac{dy}{dx} = y^2 - y$.

3. Resolver la ecuación diferencial
$$xy'' + 2y' = 6x \tag{2}$$
haciendo una sustitución adecuada para convertir la ecuación (2) en una EDO de primer orden. A partir de la ecuación de primer orden obtenida, indicar la región del plano $\mathbb{R}^2$ en donde vale el teorema de existencia y unicidad, e indicar aquellas regiones en donde no se cumple.

   Analizar en los puntos donde no se cumple el teorema, qué es lo que ocurre con las soluciones en estos puntos (¿hay solución?, ¿hay más de una? o no hay soluciones).

   Resolver los problemas de valor inicial siguientes: $y(1) = 2$, $y(1) = -2$, $y(1) = 1$, $y(0) = -3$ y graficar las soluciones obtenidas asumiendo un término constante $C = 0$ en la expresión de su solución.

4. Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y - 3(x^2 - y^2) + 3xy}{2x - y + 3(x^2 - y^2) + 2xy}, \qquad y(1.5) = 0. \tag{3}$$

   a) Graficar el campo de direcciones de la EDO anterior.
   b) A partir del campo de direcciones, esbozar la solución del problema de valor inicial (3), y agregar la curva solución al plot del campo de direcciones.
   c) Hallar numéricamente los puntos de equilibro de la EDO anterior, que son aquellos puntos en donde el campo de direcciones $F(x, y) = \mathbf{0}$ es el vector nulo. Para ello, es necesario resolver numéricamente el sistema de ecuaciones:

$$x - 3y - 3(x^2 - y^2) + 3xy = 0, \qquad 2x - y + 3(x2 - y^2) + 2xy = 0.$$

5. Considere una población de una especie de animales $P(t)$ que se modela por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P^2 - 0.06P. \tag{4}$$

   Suponga que la escala de tiempo t se mide en semanas, mientras que la escala de la población P se mide en individuos (número de individuos).

   a) Determinar las dimensionales correctas de los parámetros 0.0004 y 0.06.
   b) Hacer un análisis de los puntos de equilibro de la EDO (4), y clasificarlos de acuerdo a si son estables, inestables o semi-estables.
   c) Derivado del análisis anterior, hacer un esbozo de las soluciones $P(t)$, indicando la región donde dichas soluciones son constantes, crecientes o decrecientes, y las regiones donde las soluciones $P(t)$ tienen concavidad positiva, negativa o tiene máximos o mínimos.
   d) Suponga que la población en el tiempo $t = 0$ es $P(0) = 200$ individuos. Describir cuál será el comportamiento a futuro de $P(t)$ si la población se rige por el modelo (4).
   e) Repetir el análisis cualitativo en (d) asumiendo que la población en el tiempo $t = 0$ es $P(0) = 100$ individuos.
   f) Resolver EDO (4) y graficar las curvas solución de los problemas en (d) y (e), para mostrar en la gráfica que la solución coincide con la descripción de su análisis cualitativo.