Apuntes del Curso
Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Alan Gerardo Reyes Figueroa

(Última versión: Diciembre, 2016)

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción y motivación

En esta sección, introducimos el concepto de ecuación diferencial ordinaria, así como la terminología básica para trabajar ecuaciones diferenciales. Discutimos la importancia de las ecuaciones diferenciales,y mostramos algunas aplicaciones en la ciencias y la ingeniería.

1.1.1. Definiciones y terminología

Una *ecuación diferencial* (en ocasiones abreviado como ED) es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes.

Ejemplo 1.1.1.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = \cos x.$$

En este caso y denota la variable dependiente, mientras que x denota la variable independiente.

Ejemplo 1.1.2.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 2x = e^{-t}.$$

Aquí x denota la variable dependiente, mientras que t denota la variable independiente.

Ejemplo 1.1.3. En ocasiones, en una ecuación diferencial no aparecen derivadas. Sin embargo, en la expresión aparecen diferenciales:

$$(x + y)\, dx - 4y\, dy = 0.$$

A este tipo de ecuaciones también se les llama ecuaciones diferenciales. Recuerde de sus cursos de cálculo que las derivadas y los diferenciales están íntimamente ligados.
Aquí no está claro cuál es la variable independiente y cuál la dependiente. Observe que podemos reescribir la ecuación como $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{4y}$. En ese caso, x sería la variable independiente, mientras que y es la variable dependiente.

Por otro lado, también podemos reescribir la ecuación como $\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{x+y}$. Ahora, y sería la variable independiente, mientras que x es la variable dependiente. Este es un ejemplo de una ecuación en donde tenemos libertad de escoger la variable independiente según convenga.

Ejemplo 1.1.4 (Varias variables dependientes)**.** A veces podemos tener en una ecuación diferencial más de una variable dependiente. Por ejemplo:

$$t\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = \log t$$

Aquí u y v denotan variables dependientes de t. Usualmente esto ocurre cuando tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales como el que sigue:

$$\begin{cases} t\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = \log t \\ \frac{du}{dt} - t\frac{dv}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.1.5 (Varias variables independientes)**.** También puede ocurrir que tengamos más de una variable independiente:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = ku(x, y).$$

Note que $u = u(x, y)$ denota una variable o función que depende de dos variables independientes x y y. Observe que en este caso las derivadas que aparecen son derivadas parciales.

1.1.2. Notaciones

Recordemos de los cursos de cálculo que las derivadas pueden escribirse de diversas formas. Por ejemplo, si $y = y(x)$ denota cierta función de x, podemos escribir sus derivadas como:

$$\begin{array}{rl} y'(x), y''(x), y'''(x), \dots & \text{notación de primas} \\ \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots & \text{notación de Leibniz} \\ Dy, D^2y, D^3y, \dots & \text{notación de operador} \end{array}$$

En algunas aplicaciones, es usual que la variable independiente sea t (tiempo). En ese caso, podemos escribir las derivadas $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}, \dots$ como:

$$\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots \qquad \text{notación de punto.}$$

Similarmente, las derivadas parciales admiten más de una forma de escritura. Por ejemplo, si $u = u(x, y, z)$ denota cierta función de las variables x, y, z, podemos escribir sus derivadas parciales como:

$$\begin{array}{ccc} u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots & \text{notación de subíndices} & u_{xy}, \dots \\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \dots & \text{notación de Leibniz} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dots \\ \partial_x u, \partial_x^2 u, \partial_x^3 u, \dots & \text{notación de operador} & \partial_y \partial_x u, \dots \end{array}$$

Una consequencia de esta diversidad es que las ecuaciones diferenciales pueden escribirse de diferentes formas. Por ejemplo, la ecuación

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

puede escribirse también como $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$ o como

$$D^2y - 2Dy + 3y = (D^2 - 2D + 3)y = 0.$$

1.1.3. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Para facilitar el análisis de las propiedades de las ecuaciones diferenciales y los métodos para su solución, las EDs se clasifican de varias formas.

Clasificación por tipo

- Ecuaciones diferenciales *ordinarias* (abreviado EDO): si en la expresión de la ecuación sólo aparecen derivadas usuales, es decir, que dependen sólo de una variable independiente.
- Ecuaciones diferenciales *parciales* (abreviado EDP): si en la expresión de la ecuación aparecen derivadas parciales.

Ejemplos 1.1.6. Los ejemplos 1.2.2 a 1.2.5 anteriores son ecuaciones diferenciales ordinarias. El ejemplo 1.1.5 corresponde a una ecuación diferencial parcial. En las aplicaciones a las ciencias, las ecuaciones diferenciales que aparecen con más frecuencia son las ecuaciones diferenciales parciales. Algunos ejemplos de EDPs clásicos son[1]:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= h(x,y,z) && \text{(Ecuación de Poisson)}\\
\alpha^2\Delta u + h(x,y,z) &= \frac{\partial u}{\partial t} && \text{(Ecuación de calor)}\\
c^2\Delta u + h(x,y,z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} && \text{(Ecuación de onda)}\\
\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}\cdot\Delta\vec{v}\Big) &= -\nabla p + \nabla\cdot T + f && \text{(Ecuación de Navier-Stokes)}\\
i\partial_t\psi &= \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi && \text{(Ecuación de Schrödinger)}
\end{aligned}$$

Así, la ecuación de Poisson describe el comportamiento de una partícula cuyo movimiento se rige por un potencial. Aparece con frecuencia en problemas de potencial eléctrostático o potencial gravitatorio. La ecuación de calor aparece en problemas de termodinámica y transferencia de calor. La ecuación de onda se utiliza para describir el movimiento de ondas, por ejemplo: sismos, vibraciones mecánicas, entre otros. La ecuación de Navier-Stokes describe en general el movimiento de cualquier fluido. Por último, la ecuación de Schrödinger describe el movimiento de una partícula cuántica.

En este curso nos limitaremos a trabajar con ecuaciones diferenciales ordinarias.

[1] El operador Δ denota el laplaciano: para $u(x,y,z)$, tenemos $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Clasificación por orden

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden o grado de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

Ejemplos 1.1.7.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 5y = \cos x &\qquad \text{es una ecuación de 1er. orden} \\ (x+y)\,dx - 4y\,dy = 0 &\qquad \text{es una ecuación de 1er. orden} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''' - t^2x'x + \sqrt{tx} = 1 &\qquad \text{es una ecuación de 3er. orden} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 2x = e^{-t} &\qquad \text{es una ecuación de 2do. orden} \\ \alpha^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} &\qquad \text{es una ecuación de 4to. orden} \\ u_t = u_{xxx} + uu_x &\qquad \text{es una ecuación de 3er. orden} \end{aligned}$$

Observación 1.1.8. Podemos hacer la analogía con una ecuación polinomial $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. El grado del polinomio $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ es el mayor exponente que aparece en la ecuación (coeficiente no nulo). En una ecuación diferencial, el orden es la mayor derivada que aparece.
Observe en el cuarto ejemplo $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 2x = e^{-t}$. La mayor derivada que aparece es una segunda derivada. El término $\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$ es una primera derivada, con exponente 3. No confunda el mayor exponente con el orden de la mayor derivada.

El orden de una ED radica nos indica cierto comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial. Por ejemplo, en una ecuación polinomial, el grado nos dice el número máximo de soluciones o zeros del polinomio. En una ecuación diferencial, el orden nos indica de alguna forma el 'número esperado' de soluciones[2].

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n se representa en *forma general* por la ecuación

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

donde x denota la variable independiente, y denota la variable dependiente, y F es una función de $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Clasificación por linealidad

Decimos que una ecuación diferencial ordinaria de orden n, $F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$, es *lineal*, si

[2]Para ciertas ecuaciones diferenciales, el conjunto de soluciones es un espacio vectorial. El orden indica la dimensión de este espacio.

- F es una función lineal en la variable dependiente y sus derivadas $y, y'', y''', \ldots, y^{(n)}$,
- los coeficientes de esta combinación lineal son funciones que dependen sólo de la variable independiente x.

Así, una EDO lineal de orden n se expresa usualmente en la forma

$$\underbrace{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + g(x)}_{F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})} = 0.$$

Una ecuación que no es lineal, se dice que es *no-lineal*.

Ejemplos 1.1.9. Las siguientes son ecuaciones ordinarias lineales

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 5y = \cos x & \qquad \text{(los coeficientes son todos funciones de } x) \\ (x+y)\,dx - 4y\,dy = 0 & \qquad \text{(los coeficientes son todos funciones de } x) \\ x''' - 3t^2x' + \sqrt{t}x = 1 & \qquad \text{(los coeficientes son todos funciones de } t) \end{aligned}$$

Ejemplos 1.1.10. Las siguientes ecuaciones ordinarias son no-lineales:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx} - 2y\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2} + 2\right) = 0 & \qquad \text{(no es combinación lineal)} \\ yy'' - 2y' = x & \qquad \text{(el coeficiente de } y'' \text{ no es función de } x) \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 9y^2 = 0 & \qquad \text{(exponentes} > 1 \text{ en } y \text{ o sus derivadas)} \\ y'' - \cos(t)y' + 5\sqrt{y} = 0 & \qquad \sqrt{y} \text{ es función no lineal de } y \\ \frac{d^4\varphi}{dr^4} - 2r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + r - \sin\varphi = re^r & \qquad \operatorname{sen}\varphi \text{ es función no lineal de } \varphi \end{aligned}$$

Para las ecuaciones diferenciales parciales, la idea de linealidad es análoga. Decimos que una ecuación diferencial parcial de orden n, $F(x_1, \ldots, x_m, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}) = 0$, es *lineal*, si

- F es una función lineal en la variable dependiente y sus derivadas $u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots,$
- los coeficientes de esta combinación lineal son funciones que dependen sólo de las variables independiente $x_1, \ldots, x_m$.

Así, una EDP lineal de orden n se expresa usualmente en la forma

$$\underbrace{\sum_{|I|=n} a_I(\vec{x})\frac{\partial^n u}{\partial^{i_1}x_1 \cdots \partial^{i_m}x_m} + \ldots + \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} c_i(\vec{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(\vec{x})u + g(\vec{x})}_{F(x_1,\ldots,x_m,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}})} = 0,$$

donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $I = (i_1, \ldots, i_m)$ y $|I| = i_1 + \ldots + i_m$.

1.2. Solución de una ecuación diferencial

Considere una ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.2.1}$$

definida en cierto intervalo (a, b), esto es, todas las expresiones contenidas dentro de F son funciones bien definidas en el intervalo (a, b) (este intervalo corresponde a la variable independiente x).

Definición 1.2.1. Una *solución* de la ecuación (1.2.1) es una función $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, tal que:

- φ está bien definida en (a, b)
- φ es n-veces diferenciable en (a, b)
- φ satisfaze la ecuación (1.2.1), esto es, $F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$.

El intervalo (a, b) se llama *intervalo de definición* (*intervalo de solución* o *dominio de definición*) de φ.

Ejemplo 1.2.2. La función $y(x) = \frac{1}{16}x^8$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - 2x^3\sqrt{y} = 0 \tag{1.2.2}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución. La ecuación (1.2.2) es una ecuación de primer orden, sólo aparece la función y y su primera derivada. Como $y(x) = \frac{1}{16}x^8$, su derivada es $y'(x) = \frac{1}{2}x^7$. Luego, al sustituir y y y' en (1.2.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - 2x^3\sqrt{y} &= \tfrac{1}{2}x^7 - 2x^3\sqrt{\tfrac{1}{16}x^8} \\
&= \tfrac{1}{2}x^7 - 2x^3\left(\tfrac{1}{4}x^4\right) = \tfrac{1}{2}x^7 - \tfrac{1}{2}x^7 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3. La función $y(x) = xe^x + \cos x$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 2y + y = -2\sin x \tag{1.2.3}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución. La ecuación (1.2.3) es una ecuación de segundo orden, aparece la función y, y sus derivadas y', y''. Como $y(x) = xe^x + \cos x$, su derivada es $y'(x) = xe^x + e^x + -\sin x$, y la segunda derivada es $y''(x) = xe^x + 2e^x - \cos x$. Luego, al sustituir y, y' y y'' en (1.2.3) resulta

$$\begin{aligned}
y'' - 2y' + y &= (xe^x + 2e^x - \cos x) - 2(xe^x + e^x - \sin x) + (xe^x + \cos x) \\
&= (xe^x - 2xe^x + xe^x) + (2e^x - 2e^x) + (-\cos x - 2\sin(x) + \cos(x)) \\
&= -2\sin x.
\end{aligned}$$

Usualmente, el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial es amplio, en el sentido que el número de soluciones es infinito. Por ejemplo, sabemos que las únicas funciones que satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.2.4}$$

en $(-\infty, \infty)$ son las funciones constantes (todas las funciones constantes tienen derivada nula, y cualquier función contínua en $\mathbb{R}$ con derivada nula deve ser constante. En este caso, decimos que el conjunto de funciones $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, describe una familia 1-paramétrica de soluciones de la ecuación (1.2.4), pues aparece una única constante o parámetro que puede ser variado.
En general, decimos que una familia de curvas $f(x, y)$ es una *familia n-paramétrica* de soluciones de la ecuación (1.2.1) si en la expresión $f(x, y)$ aparecen n constantes (parámetros) que pueden modificarse. En el caso en que todas las soluciones de (1.2.1) están dentro de la familia n-paramétrica, llamamos a esa familia la *solución general* de la ecuación. Cuando damos valores específicos a esos parámetros, obtenemos una *solución particular*. Por ejemplo, las funciones $y(x) = 5$, $y(x) = -1$ y $y(x) = 0$ son soluciones particulares de la ecuación (1.2.4). En ocasiones es posible encontrar, aparte de la familia n-paramétrica, otras funciones que son soluciones. Cada una de tales soluciones es llamada una *solución singular* de (1.2.1).

Ejemplo 1.2.4. Compruebe que la familia $x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ define una familia 2-paramétrica de soluciones de la ecuación

$$x'' + 16x = 0.$$

Solución. Derivando $x(t)$ dos veces, tenemos $x'(t) = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$ y $x''(t) = -16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t$. Luego,

$$x'' + 16x = (-16c_1 \cos 4t - 16c_2 \sin 4t) + 16(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) = 0.$$

En este caso, $x_p(t) = 3 \cos 4t - \frac{2}{5} \sin 4t$ es una solución particular, que corresponde a los parámetros $c_1 = 3$ y $c_2 = \frac{2}{5}$.

Ejemplo 1.2.5. La ecuación diferencial $y' = x\sqrt{y}$ tiene por soluciones la familia 1-paramétrica $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$, $c \in \mathbb{R}$ (Verifique!). Observe que $y(x) = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial, que no está en la familia 1-paramétrica. De ahí que $y(x) = 0$ es una solución singular.

Resolver la ecuación diferencial (1.2.1) consiste en encontrar todas sus soluciones (solución general), es decir, hallar el conjunto de todas las funciones $y = \varphi(x)$ que satifacen la ecuación (1.2.1). Otro tipo de problema que aparece con frecuencia es el determinar si por un punto dado (x_0, y_0) (dentro del dominio de definición de la ecuación (1.2.1)), es posible encontrar una solución que pasa por ese punto. Es decir, determinar si existe una solución particular $y(x)$ de (1.2.1) tal que satisface

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ \qquad y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Este tipo de problema se conoce como *problema de valores iniciales*. A la relación $y(x_0) = x_0$ se le llama *condición inicial* del problema.

Resolver una ecuación diferencial conduce eventualmente a integrar funciones (vea el ejemplo 1.2.6). Por esta razón, a veces decimos '*integrar una ecuación diferencial*'. A la solución de una ecuación diferencial también se le llama una *curva integral* o una *integral* de la ecuación.

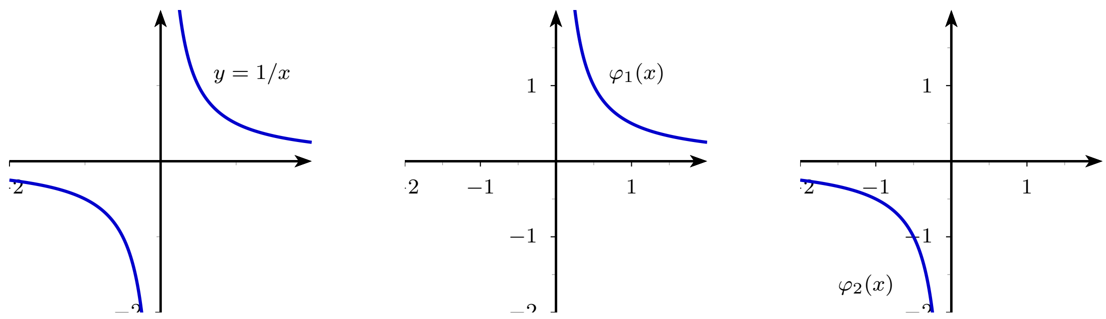
1.2.1. Funciones vs. soluciones

Hay una diferencia fundamental entre lo que conocemos como función, y una solución de una EDO. En la definición 1.2.1, indicamos que una solución $\varphi(x)$ de la ecuación (1.2.1) es una función definida en un cierto intervalo (a, b), y que es n veces diferenciable (segun el orden de la ecuación). Como en una ecuación diferencial al menos aparece una derivada, esto es $n \geq 1$, entonces cualquier solución $\varphi(x)$ debe ser diferenciable, en particular continua en (a, b):

$$\boxed{\varphi(x) \text{ solución } \;\Rightarrow\; \varphi(x) \text{ diferenciable } \;\Rightarrow\; \varphi(x) \text{ continua.}}$$

Así, una función que presenta alguna discontinuidad en (a, b) no puede ser solución de (1.2.1).

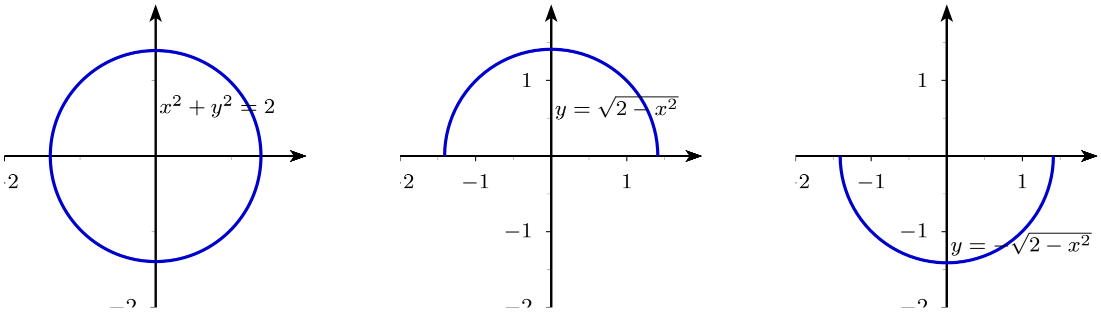
Por ejemplo, la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ admite como solución la función $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \infty)$, pero no en el intervalo $(-1, 1)$, pues $\frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$. En ese caso, el intervalo de definición de la solución φ_1 es $(0, \infty)$.
Observe que $(-\infty, 0)$ es otro intervalo donde la función $\frac{1}{x}$ está definida. Entonces, la ecuación $xy' + y = 0$, posee otra solución $\varphi_2(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$. Aunque la función que define φ_1 y φ_2 es la misma, éstas se consideran soluciones distintas de la ecuación diferencial (figura 1.1). La solución general de $xy' + y = 0$ es la familia 1-paramétrica $y(x) = \frac{c}{x}$.



(a) (b) (c)

Figura 1.1: **Funciones vs. soluciones**. *(a) La función $y(x) = 1/x$ definida en $\mathbb{R} - \{0\}$. (b),(c) Dos soluciones distintas de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$.*

En ocasiones también es necesario extender el concepto de solución. Consideraremos también soluciones que, aunque no son funciones, definen una curva en el plano que satisfaze la ecuación diferencial. Por ejemplo, la curva $x^2+y^2=2$ define una solución de la ecuación diferencial $x\,dx + y\,dy = 0$ (Verifique!). Observe que la curva define una circunferencia con centro en el origen, y por lo tanto no es función. A este tipo de soluciones se les llama *soluciones implícitas* o *curvas solución*. En contraste, a las soluciones que sí son funciones, se les llama en ocasiones *soluciones explícitas* (vea figura 1.2).



(a) (b) (c)

Figura 1.2: **Soluciones implícitas vs. soluciones explícitas**. *(a) La curva $x^2+y^2=4$ define una solución explícita de la ecuación diferencial $x\,dx + y\,dy = 0$. (b),(c) Dos soluciones explícitas correspondientes.*

1.2.2. Existencia y unicidad de soluciones

No todas las ecuaciones diferenciales tienen solución. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 = 0. \tag{1.2.6}$$

no posee solución en los números reales (ninguna suma de cuadrados positivos puede ser zero). Sin embargo, en los números complejos $\mathbb{C}$ la ecuación (1.2.6) tiene como solución la familia de funciones $y(x) = \pm 2ix + c$, $c \in \mathbb{C}$.
Un ejemplo similar es la ecuación de segundo orden $(y')^2 + 5y^2 + 1 = 0$. No posee soluciones reales.

Ya discutimos en la sección anterior que la ecuación $xy' + y = 0$ no posee solución en el intervalo $(-1,1)$, o en cualquier intervalo abierto que contenga al 0, pues las soluciones $y(x) = \frac{c}{x}$ no están definidas en $x = 0$.

Un caso similar ocurre con el problema de valores iniciales $(x-1)\frac{dy}{dx} = 1$, $y(\frac{1}{5}) = 2$: no posee solución. Observe que la solución general de la ecuación $(x-1)\frac{dy}{dx} = 1$ está dada por la familia de funciones $y(x) = c\log(x-1)$. Luego, las soluciones están definidas únicamente en el intervalo $(1,\infty)$. Por lo tanto, la condición inicial $y(\frac{1}{5}) = 2$ no hace sentido ($x = \frac{1}{5}$ está fuera del dominio de solución).

De inmediato surge la pregunta natural: ¿qué condiciones son necesarias y suficientes para garantizar que la ecuación diferencial (1.2.1) posee solución?, o por ejemplo, ¿qué condiciones son necesarias y suficientes para garantizar que por el punto (x_0, y_0) pasa alguna

solución de (1.2.1)? Mas todavía, en el caso en que exista tal solución a ese problema de valor inicial, ¿podemos asegurar que tal solución es única? ¿Hay más de una?
Este problema de asegurar la existencia y la unicidad de soluciones será estudiado a lo largo del curso.

1.2.3. Ecuaciones diferenciales como modelos

Debido a que una derivada mide la tasa de cambio (instantánea) de una variable respecto a otra, las ecuaciones diferenciales se adaptan bien para estudiar problemas donde aparecen variables cambiando. Por ejemplo, se adecuan perfectamente a la hora de estudiar la dinámica de un sistema o un proceso. En las ciencias y la ingeniería, ocurren muchos procesos que cambian con respecto del tiempo, o con repecto de alguna variable. Las ecuaciones diferenciales proporcionan una herramienta útil para modelar y analizar este tipo de comportamiento.

Ya mencionamos antes algunas aplicaciones de las EDs. Por ejemplo para estudiar movimiento de cuerpos, dinámica de fluidos, vibraciones o tranferencia de calor. Las ecuaciones diferenciales pueden usarse también en las ciencias biológicas o ambientales, por ejemplo para modelar la dinámica poblacional; en economía y finanzas, para estudiar la evolución de un mercado o la dinámica de los precios; incluso en ciencias sociales es posible modelar la dinámica de un sistema social por medio de ecuaciones diferenciales. Más adelante estudiaremos algunos de estas aplicaciones. Veamos ahora un ejemplo sencillo:

Ejemplo 1.2.6 (Movimiento de caída libre)**.** De sus cursos de física, recordemos el movimiento de un cuerpo de masa constante m está descrito por la segunda ley de Newton:

$$F = ma. \tag{1.2.7}$$

Suponga que un objeto de masa constante $m > 0$ se deja caer desde una posición inicial y_0 (altura), a una velocidad inicial de v_0. Suponga que la única fuerza que actúa sobre el objeto es su propio peso, ignorando la resistencia del aire. La posición vertical del objeto en un instante t se describe por la variable $y(t)$.
Como $y(t)$ describe la posición, sabemos que $\dot{y}(t)$ describe la velocidad (vertical) del objeto en el instante t, mientras que $\ddot{y}(t)$ indica la aceleración vertical instantánea. Esta aceleración instantánea $a = \ddot{y}$ es la que aparece en la ecuación de la 2a. ley de Newton. Así, (1.2.7) es una ecuación diferencial.
Haciendo un diagrama de cuerpo libre para el objeto. Tenemos que la fuerza total actual es sólo su peso, es decir $F = -mg$, donde $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$. Igualando con (1.2.7), tenemos la ecuación diferencial

$$-mg = ma = m\ddot{y}, \quad \text{o equivalentemente,} \quad \ddot{y} = -g.$$

Para resolver esta ecuación, integramos dos veces respecto de t. Así,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \int \ddot{y}(t)\,dt \int -g\,dt = -gt + c_1, \\ \text{y } y(t) &= \int \dot{y}(t)\,dt = \int (-gt + c_1)\,dt = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2. \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $\dot{y}(0) = v_0$, obtenesmos valores para las constantes c_1, c_2: $c_1 = \dot{y}(0) = y_0$ y $c_2 = y(0) = y_0$. Portanto, la ecuación que describe la caída libre del objeto es

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0,$$

que es la fórmula que usted aprende en los cursos de física.

Capítulo 2

Ecuaciones de primer orden

Antes de comenzar a resolver ecuaciones diferenciales, abordamos un enfoque cualitativo, es decir, trataremos de obtener la mayor cantidad de información sobre las soluciones de una ecuación diferencial, sin calcularlar explícitamente.

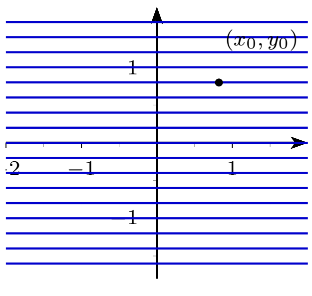
2.1. Existencia y unicidad de soluciones

En la sección anterior mencionamos el problema de saber si una ecuación diferencial admite solución. Más concretamente, dada una ecuación de primer orden $F(x, y, y') = 0$, queremos determinar condiciones para garantizar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

posee solución; y en caso exista, queremos determinar condiciones que garanticen que tal solución es única.

Ejemplo 2.1.1. Ya mencionameos que las únicas soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $y' = 0$ es la familia 1-paramétrica de funciones constantes $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

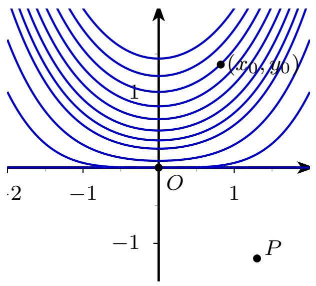


Soluciones de $y' = 0$.

Al graficar las soluciones, observamos que éstas definen rectas horizontales que no se cortan unas con otras. Podemos pensar que las soluciones forman 'líneas de flujo'. Observe que para cualquier punto (x_0, y_0) del plano, siempre podemos encontrar una solución $y(x) = c$ que pasa por ese punto: la función $y(x) = y_0$. De hecho, esta es la única solución de $y' = 0$ pasando por el punto (x_0, y_0) (verifique!).

Ejemplo 2.1.2. En la sección 1.4 vimos que la ecuación diferencial $y' - x\sqrt{y} = 0$ tiene por soluciones la familia 1-paramétrica $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$, $c \geq 0$.

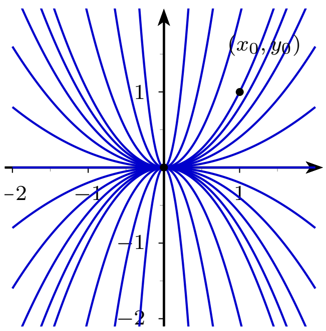
Compruebe el lector que las funciones $y(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x\geq 0 \end{cases}$ y $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^4 & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$ también son soluciones de $y' - x\sqrt{y} = 0$ (ambas son continuas y diferenciables en $x = 0$).



Soluciones de $y' - x\sqrt{y} = 0$.

Vimos también que la función constante $y(x) = 0$ es una solución. En este caso las soluciones $y(x) = \frac{1}{16}x^4$ y $y(x) = 0$ satisfacen la condición inicial $y(0) = 0$. En otras palabras, ambas soluciones pasan por el punto $(0, 0)$ del plano. Observe en la gráfica que ambas soluciones se cortan en el origen, en contraste con el flujo lineal del ejemplo anterior. Por otro lado, para un punto P abajo del eje x no existe ninguna solución de la ecuación pasando por P (¿por qué?). En cambio, para puntos arriba del eje x sí existe solución (y es única).

Ejemplo 2.1.3. La ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = 2y$ tiene por solución la familia 1-paramétrica de parábolas $y(x) = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.



Soluciones de $xy' = 2y$.

Aquí, todas las soluciones se cortan en el punto $(0, 0)$. Es natural preguntar si para otros puntos (x, y) diferentes del origen, por ejemplo el punto $(1, 1)$; no existe solución, existe una, o hay más de una solución pasando por ese punto. La respuesta es que sí hay solución, mas no es única. De hecho, existe una infinidad de soluciones pasando por cada punto (x, y). ¿Puede construir algunas?
Observe que las funciones definidas por regiones

$$y(x) = \begin{cases} c_1x^2 & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad y(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ c_2x^2, & x\geq 0 \end{cases}$$

definen familias 1-paramétricas de soluciones.

Como ejercicio para el lector, queda comprobar que $y(x) = \begin{cases} c_1x^2 & x < 0 \\ c_2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ define una familia 2-paramétricas de soluciones.

Los ejemplos anteriores son diferentes, en el sentido que el comportamiento de las soluciones del ejemplo 2.1.1 es un 'flujo laminar' (las soluciones no se cruzan), mientras que en los ejemplos 2.1.2 y 2.1.3 existen puntos donde las soluciones se intersecan, y existen regiones donde hay un comportamiento 'laminar'.

2.2. El teorema fundamental de las EDO

Representamos una ecuación diferencial de primer orden en forma general por $F(x, y, y') = 0$. En ocasiones es posible despejar el término $\frac{dy}{dx} = y'$ de tal ecuación, en ese caso, representamos la ecuación diferencial en su *forma normal*:

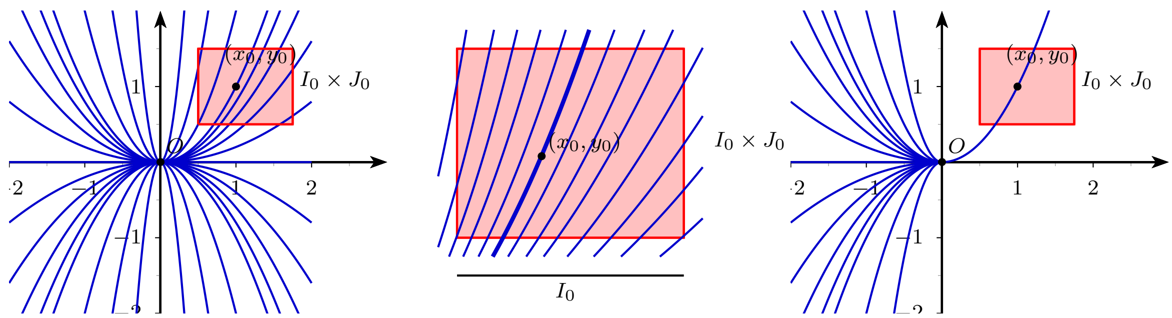
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2.1}$$

Nos gustaría encontrar un resultado que indique de alguna forma si, dada una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ y una condición inicial (x_0, y_0), podemos hallar una solución de problema de valores iniciales (4.1.3), y cuándo esa solución es única. Justamente ese es el contenido del siguiente

Theorema 2.2.1 (Teorema de existencia y unicidad (Teorema de Picard), para ecuaciones de 1er. orden)**.** *Sea* $R = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}$ *una región rectangular en el plano, que contiene al punto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*. Si* $f(x, y)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *son continuas en la región* R*, entonces existe un intervalo* $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h)$ *contenido en* (a, b) *tal que y* ***existe una única*** *función* $\varphi(x) : I_0 \to \mathbb{R}$ *que satisface el problema de valores iniciales*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

En esencia, el teorema de Picard asegura lo siguiente: Tome una ecuación de primer orden en su forma normal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. En los puntos (x_0, y_0) donde ambas funciones $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ son continuas, en esos puntos está garantizada la existencia de una única solución local de (2.2.1) que pasa por ese punto. Explicamos esto con más detalle. Si (x_0, y_0) es un punto donde se satisfacen las condiciones del Teorema de Picard, podemos asegurar la existencia de un cierta región rectangular $I_0 \times J_0$ conteniendo el punto (x_0, y_0) y contenida en la región rectangular R, tal que dentro de esa región menor, existe una solución de la ecuación (2.2.1) pasando por (x_0, y_0), y tal solución es la única que pasa por ese punto (dentro del resto de soluciones en la región $I_0 \times J_0$. El término local, se refiere justamente a que la región $I_0 \times J_0$ es una región cercana al punto (x_0, y_0).
Cuando decimos que el Teorema de Picard garantiza la existencia de soluciones únicas, nos referimos a unicidad en sentido local, es decir, dentro de esa pequeña región cercana a (x_0, y_0) sólo hay una solución que pasa por (x_0, y_0). Al intervalo I_0 se le llama *intervalo de unicidad* de la solución φ. Puede ocurrir que lejos el punto (fuera de la región $I_0 \times J_0$), podamos encontrar más de una solución que pase también por (x_0, y_0). En otras palabras, fuera del intervalo de unicidad I_0, podemos encontrar más soluciones que satisfacen $y(x_0) = y_0$.



(a) (b) (c)

Figura 2.1: **Teorema de existencia y unicidad**. *(a) El teorema de Picard garantiza una región* $I_0 \times J_0$ *en donde existe una única solución pasando por* (x_0, y_0)*. (b) Detalle de la región o intervalo de unicidad. Observe que dentro de la región* $I_0 \times J_0$ *las soluciones se comportan como un flujo laminar. (c) Fuera de la reción de unicidad, por el punto* (x_0, y_0) *puede haber más de una solución.*

Debido a la importancia de este resultado, al Teorema de Picard se le conoce también como el Teorema Fundamental de las EDO. Revisemos de nuevo los ejemplos anteriores.

Ejemplos 2.2.2 (Ejemplo 2.1.1)**.** Tenemos la ecuación en forma normal

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.2.2}$$

En este caso la función $f(x, y) = 0$ y su derivada parcial es $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Ambas f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son contínuas en todos los puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Luego, el Teorema de existencia y unicidad asegura que por cada punto del plano, pasa una solución, y sólo una.

En el ejemplo 2.1.2 la ecuación escrita en forma normal es

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}. \tag{2.2.3}$$

En este caso la función $f(x, y) = x\sqrt{y}$ y su derivada parcial es $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$. Observe que la ecuación diferencial está definida únicamente para puntos (x, y), con $y \geq 0$ (para que la raíz no se indefina). Ambas f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son contínuas en la región $R = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ (¿por qué?). Para todo punto de la región R, el Teorema de Picard garantiza la existencia de una única solución.
Observe que para los puntos que quedan fuera de la región acontece lo siguiente:

- Para los puntos de la forma $(x, 0)$, es decir los que están sobre el eje x, podemos encontrar más de una solución que pasa por esos puntos. De hecho, la función constante $y(x) = 0$ y las funciones $y(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16}x^4, & x\geq 0 \end{cases}$, $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^4 & x<0 \\ 0, & x\geq 0 \end{cases}$, son soluciones pasando por esos puntos.

- En los puntos (x, y), con $y < 0$ no hay solución que pase por tales puntos. De hecho, en estos valores la ecuación diferencial (**??**) está indefinida.

Por último, en el ejemplo 2.1.3 tenemos la ecuación en forma normal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}. \tag{2.2.4}$$

En este caso la función es $f(x, y) = \frac{2y}{x}$ y su derivada parcial es $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{x}$. Ambas f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas y son contínuas en todo los puntos (x, y) del plano tales que $x \neq 0$. Así, tenemos dos regiones $R_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ y $R_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ donde vale el teorema de Picar. De ahí que el Teorema de existencia y unicidad asegura que por cada punto de las regiones R_1 o R_2 pasa una única solución.
Para los puntos fuera de $R_1 \cup R_2$, es decir el eje y ocurre:

- Para el origen $(0, 0)$, tenemos infinitas soluciones. De hecho, ya mencionamos que todas las soluciones e (2.2.4) pasan por el origen.

- En los puntos de la forma $(0, y)$, con $y \neq 0$ no pasa ninguna solución. Recordemos que la solución general de (2.2.4) es la familia 2-paramétrica de segmentos de parábola

$$y(x) = \begin{cases} c_1x^2 & x < 0 \\ c_2x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Note que todas las funciones de esta familia satisfacen $y(0) = 0$, es decir, pasan por el origen. Por lo tanto no pueden pasar por otro punto del eje vertical $(0, y)$, si $y \neq 0$.

Observación 2.2.3. En los puntos (x_0, y_0) donde no se cumples las hipótesis del Teorema de existencia y Unicidad, pueden ocurrir varias cosas:

- puede que no exista solución pasando por (x_0, y_0),
- puede que exista más de una solución pasando por (x_0, y_0),
- puede que exista una única solución pasando por (x_0, y_0).

Así, los puntos en donde no vale el Teorema de Picard deben estudiarse caso por caso.

Capítulo 3

Solución de ecuaciones de 1er. orden

En esta sección, comenzaremos un enfoque algebraico/analítico de las ecuaciones diferenciales. Nuestro interés es resolver explícitamente una ecuación diferencial, es decir, hallar expresiones concretas de las soluciones.

Resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales no siempre es posible, pero en el caso de las ecuaciones de primer orden, existen métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones que presentan determinadas características o propiedades. Estudiaremos algunos de los más habituales. Los objetivos de esta sección son:

- Distinguir de cuál tipo es una ecuación diferencial de primer orden.
- Aplicar métodos de resolución correspondiente.

3.1. Ecuaciones separables

Una ecuación diferencial de 1er. orden en forma normal es *separable* si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = p(x)q(y). \tag{3.1.1}$$

Es decir, si la función $f(x, y)$ se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y.

Equivalentemente, una ecuación es separable si en su forma diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

ambas funciones M y N pueden descomponerse como producto de una función de x por una función de y, es decir, si puede escribirse en la forma:

$$f(x)g(y)\, dx + h(x)k(y)\, dy = 0. \tag{3.1.2}$$

El método para resolver la ecuación separable (3.1.1) se conoce como *separación de variables*. Consiste en separar cada una de las variables (dependiente e independiente) en lados distintos de la ecuación, y separar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en dos diferenciales dx y dy:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\, dx. \tag{3.1.3}$$

Luego, integramos ambas partes de la igualdad (3.1.3)

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\, dx. \tag{3.1.4}$$

Observe que ambas integrales en la ecuación anterior son indefinidas. Obtenemos así una familia de soluciones $Q(y)+c_1 = P(x)+c_2$. Podemos juntar las constantes c_1 y c_2 es una única constante $c = c_2 - c_1$, y expresar la solución como una familia 1-paramétrica de soluciones

$$Q(y) = P(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.1.5}$$

Ejemplo 3.1.1. Considere la ecuación diferencial

$$y' = -6xy.$$

Sabemos que el teorema de existencia y unicidad vale en todo $\mathbb{R}^2$, y debemos esperar una única solución en cada punto (x, y) del plano. Haciendo un análisis de signos, tenemos soluciones decrecientes en el primero y tercer cuadrante, y crecientes en el segundo y cuarto cuadrante. En los puntos donde $x = 0$ (eje y) podemos esperar que las soluciones presenten máximos o mínimos. Las soluciones tienen puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{1/6}$.

La función $f(xy) = -6xy$ es producto de dos funciones $p(x) = -6x$, $q(y) = y$ (o equivamentemente $p(x) = x$, $q(y) = -6y$), y por lo tanto es separable. Resolvemos la ecuación usando el método de separación de variables. Separamos: las y del lado izquierdo, las x del lado derecho

$$\frac{dy}{y} = -6x\, dx.$$

Integrando ambos lados de la ecuación,

$$\int \frac{dy}{y} = \int -6x\, dx$$

obtenemos $\log|y| = -3x^2 + \tilde{c}$. Una práctica usual es que podemos quitar el logaritmo de la expresión obtenido aplicando la función exponencial en ambos lados. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} |y| &= e^(\log|y|) = e^{-3x^2+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}} e^{-3x^2} \\ &= Ae^{-3x^2}, \ A = e^{\tilde{c}}, \\ y &= ce^{-3x^2}, \ c = \pm A. \end{aligned}$$

La solución general está dada por la familia 1-paramétrica $\boxed{y(x) = ce^{-3x^2}, \ c \in \mathbb{R}}$.

Ejemplo 3.1.2. Resuelva el problema de valor inicial

$$y' = -6xy, \quad y(1) = 7. \tag{3.1.6}$$

Solución. Del ejemplo anterior, sabemos que la solución general de la ecuación $y' = -6xy$ está dada por la familia

$$y(x) = ce^{-3x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Queremos ahora hallar la constante c adecuada, de modo que la solución pase por el punto $(1, 7)$, esto es, $y(1) = 7$. Para eso, evaluamos la solución $y(x) = ce^{-3x^2}$ en $x = 1$, $y = 7$:

$$7 = y(1) = ce^{-3(1)^2} = ce^{-3} \;\Rightarrow\; c = 7e^3.$$

Así, la constante requerida es $c = 7e^3$, y la solución que pasa por el punto $(1, 7)$ es

$$y(x) = (7e^3)e^{-3x^2} = 7e^{3-3x^2}.$$

Una forma alterna de resolver un problema de valor inicial es utilizando integrales definidas en la ecuación (3.1.4). Para eso, escribimos todas las funciones en términos de una variable 'muda' t, y valuamos las funciones con los extremos en el intervalo requerido. En este caso, en lugar de integrar

$$\int \frac{dy}{y} = \int -6x\, dx$$

hacemos

$$\begin{aligned} \int_7^y \frac{dt}{t} &= \int_1^x -6t\, dt \\ \big(\log t\big)\Big|_{t=7}^{t=y} &= -3t^2\Big|_{t=1}^{t=x} \\ \log y - \log 7 &= -3x^2 + 3, \end{aligned}$$

por lo que $\log y = (\log 7)(3 - 3x^2)$. Quitando logaritmos, obtenemos $y(x) = 7e^{3-3x^2}$, que es la misma solución obtenida por el método anterior.

No siempre la solución de una ecuación separable puede expresarse como una familia de funciones $y = P(x)$ (soluciones explícitas). Es usual que la solución consista de una familia de curvas $F(x, y, c) = 0$ (soluciones implícitas).

Ejemplo 3.1.3. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{3y^2 - 5}$$

es separable. La ecuación tiene puntos críticos en $(2, \sqrt{\frac{5}{3}})$ y $(2, -\sqrt{\frac{5}{3}})$. El teorema de existencia y unicidad vale en todo punto del plano, excepto en los puntos críticos.

Usamos el método de separación de variables. Tenemos

$$(3y^2 - 5)\, dy = (4 - 2x)\, dx.$$

Integrando de ambos lados

$$\int (3y^2 - 5)\, dy = \int (4 - 2x)\, dx$$

obtenemos la familia 1-paramétrica de curvas $\boxed{y^3 - 5y = 4x - x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}}$.

Ejemplo 3.1.4. Resolver el problema de valores iniciales $(1+e^x)y\,dy - e^x\,dx = 0$, $y(0) = 1$.
La ecuación diferencial

$$(1+e^x)y\,dy - e^x\,dx = 0 \tag{3.1.7}$$

es separable. El teorema de existencia y unicidad vale en todo el plano. Aplicando separación de variables, escribimos

$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

e integrando ambos lados

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\ \tfrac{1}{2}y^2 &= \int \frac{du}{u} = \log u = \log(1+e^x), \qquad u = 1+e^x. \end{aligned}$$

Así, la familia de soluciones está dada por $\boxed{\tfrac{1}{2}y^2 = \log(1+e^x) + c,\ c \in \mathbb{R}}$. Para hallar la constante, evaluamos $y(0) = 1$. Luego, $\frac{1}{2}(1)^2 = \log(1+e^0) + c \Rightarrow \frac{1}{2} = \log 2 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \log 2$ y la solución que resuelve el problema es $\frac{1}{2}y^2 = \log(1+e^x) - \log 2 + \frac{1}{2}$.

Pérdida de soluciones

En ocasiones, el hecho de separar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en dos diferenciales hace que algunas de las soluciones de la ecuación separable (3.1.1) no aparezcan en la familia 1-paramétrica de soluciones. Esto se debe a que al hacer la separación de variables

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\,dx$$

el término $\frac{1}{q(y)}$ indefine el lado izquierdo de la ecuación cuando $q(y) = 0$. Así, si $q(y) = 0$ es una solución de la ecuación diferencial (3.1.1), la añadimos a la familia 1-paramétrica para obtener la solución general (a menos que ya esté incluida en dicha familia).

Si la ecuación diferencial presenta la forma (3.1.2), dividimos la ecuación por $g(y)h(x)$, obteniendo:

$$\frac{f(x)}{h(x)}\,dx + \frac{k(y)}{g(y)}\,dy = 0$$

y por tanto, al separar las variables, la ecuación queda de la forma

$$\int \frac{k(y)}{g(y)}\,dy = -\int \frac{f(x)}{h(x)}\,dx.$$

obteniendo la solución implícita $Q(y) = P(x) + c$. En este caso, la solución obtenida no está definida para los valores de x tales que $h(x) = 0$. Si $g(y) = 0$ es solución de la ecuación diferencial, la añadimos a la familia 1-paramétrica de soluciones.

Ejemplo 3.1.5. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 - 7)\cos x \tag{3.1.8}$$

es separable. El teorema de existencia y unicidad vale en todo el plano. Aplicando el método de separación de variables, escribimos

$$\frac{dy}{y^2 - 7} = \cos x \, dx$$

(observe que las soluciones constantes $y = \pm\sqrt{7}$ indefinen el lado izquierdo). Integrando ambos lados

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^2 - 7} &= \int \cos x \, dx \\
\int \left(\frac{1/2\sqrt{7}}{y - \sqrt{7}} - \frac{1/2\sqrt{7}}{y + \sqrt{7}} \right) dy &= \int \cos x \, dx \\
\tfrac{1}{2\sqrt{7}} \log(y - \sqrt{7}) - \tfrac{1}{2\sqrt{7}} \log(y + \sqrt{7}) &= \sin x + \tilde{c} \\
\tfrac{1}{2\sqrt{7}} \log\left(\frac{y - \sqrt{7}}{y + \sqrt{7}} \right) &= \sin x + c.
\end{aligned}$$

De ahí que $\frac{y-\sqrt{7}}{y+\sqrt{7}} = ce^{2\sqrt{7}\sin x}$, y por lo tanto, obtenemos la familia 1-paramétrica de soluciones $\boxed{y(x) = \sqrt{7}\frac{1+ce^{2\sqrt{7}\sin x}}{1-ce^{2\sqrt{7}\sin x}}, \ c \in \mathbb{R}}$. Observe que

- La solución constante $y(x) = \sqrt{7}$ ya está incluida en la familia (se obtiene cuando $c = 0$).
- La solución $y(x) = -\sqrt{7}$ no es parte de la familia (se obtendría haciendo $c = \infty$). Por lo tanto debemos añadirla.

Recuerde de sus cursos de cálculo que existen funciones cuya integral no puede expresarse en términos de funciones elementales. En este caso, la expresión para las soluciones queda en forma integral.

Ejemplo 3.1.6. Resolver el problema de valores iniciales $xy' = \sin x$, $y(5) = 8$. La ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = \sin x$$

es separable. Separando las variables e integrando, tenemos

$$\int dy = \int \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Ahora, la integral $\int \frac{\sin x}{x} \, dx$ no puede expresarse en funciones elementales, por lo que debe quedar en forma integral. Así la solución general de la ecuación es $\boxed{y(x) = \int \frac{\sin x}{x} \, dx + c}$.

Para resolver la condición inicial $y(5) = 8$, se debe efectuar la integración definida:

$$\begin{aligned} \int_8^y dt &= \int_5^x \frac{\sin t}{t}\,dt \\ y - 8 &= \int_5^x \frac{\sin t}{t}\,dt \end{aligned}$$

y la solución está dada por $y(x) = 8 + \int_5^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

¿Por qué se puede separar $\frac{dy}{dx}$?

Recordemos que el término $\frac{dy}{dx}$ denota la derivada de y respecto de x, y por lo tanto no es una fracción. Cabe preguntar entonces, ¿por qué en el método de separación de variables, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede quebrarse como dy y dx como si se tratase de una división? La respuesta de esto radica en el teorema fundamental del cálculo, y en el teorema de cambio de variable.

Considere una ecuación separable $\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$, definida en algún intervalo (a, b). Usando el método de separación de variables, podemos reescribirla como en (3.1.4)

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\,dx.$$

Suponga que $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una solución para dicha ecuación diferencial que pasa por el punto (x_0, y_0). Entonce φ satisface

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{q(\varphi(t))}\,\varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^x p(t)\,dt.$$

Usando el cambio de variables $s = \varphi(t)$, $y_0 = \varphi(x_0)$, tenemos que $ds = \varphi'(t)\,dt$. Por el teorema de mudanza de variable, obtenemos

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{q(s)}\,ds = \int_{x_0}^x \frac{1}{q(\varphi(t))}\,\varphi'(t)\,dt = \int_{x_0}^x p(t)\,dt.$$

que es la técnica mostrada en (3.1.4).

3.2. Ecuaciones homogéneas

Recordemos que una función de dos variables $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado* m en U, si para todo $(x, y) \in U$ y todo $t > 0$ tal que $(tx, ty) \in U$ se cumple

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \tag{3.2.1}$$

En esencia, una función $f(x, y)$ es homogénea de grado m, si al multiplicar los argumentos por una constante t, esta constante puede 'salir de la función' con exponente m.

Ejemplos 3.2.1. Veamos que la función $f(x, y) = x^3y - 8y^4 + x^2y^2$ es homogénea de grado 4.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^3(ty) - 8(ty)^4 + (tx)^2(ty)^2 = t^4x^3y - 8t^4y^4 + t^4x^2y^2 = t^4(x^3y - 8y^4 + x^2y^2) \\ &= t^4 f(x, y). \end{aligned}$$

La función $f(x, y) = \sqrt[5]{x^2 + y^2}$ es homogénea de grado $\frac{2}{5}$.

$$f(tx, ty) = \sqrt[5]{(tx)^2 + (ty)^2} = \sqrt[5]{t^2(x^2 + y^2)} = t^{2/5} \sqrt[5]{x^2 + y^2} = t^{2/5} f(x, y).$$

La función $f(x, y) = x^2y^2 - 3xy + \log x$ no es homogénea.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2(ty)^2 - 3(tx)(ty) + \log(tx) = t^4x^2y^2 - 3t^2xy + \log(tx) \\ & \text{(note que no se puede obtener un factor común de la forma } t^m). \end{aligned}$$

La función $f(x, y) = \frac{x}{4y} - 7$ es homogénea de grado 0.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \tfrac{tx}{4(ty)} - 7 = \tfrac{tx}{4ty} - 7 = \tfrac{x}{4y} - 7 = f(x, y) = t^0 f(x, y). \\ &= tf(x, y). \end{aligned}$$

Proposición 3.2.2. *(i) El producto de dos funciones homogéneas de grados m y n es una función homogénea de grado $m + n$.*
(ii) El cociente de una función homogénea de grado m entre una función homogénea de grado n, es una función homogénea de grado $m - n$.

Prueba. Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ homogéneas de grados m y n, respectivamente. Entonces
(i) $(f \cdot g)(tx, ty) = f(tx, ty) \cdot g(tx, ty) = t^m f(x, y) \cdot t^n g(x, y) = t^{m+n}(f \cdot g)(x, y)$.
(ii) $\frac{f}{g}(tx, ty) = \frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)} = \frac{t^m f(x,y)}{t^n g(x,y)} = t^{m-n} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = t^{m-n} \frac{f}{g}(x, y)$.

Definición 3.2.3. Una ecuación diferencial de 1er. orden en forma diferencial es *homogénea* si

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{3.2.2}$$

con $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones homogéneas del mismo grado.
Equivalentemente, una ecuación es homogénea si en su forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2.3}$$

la función $f(x,y)$ es homogénea de grado 0 (observe que de (3.2.2), tenemos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, con $-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ un cociente de funciones homogéneas del mismo grado).

Una ecuación homogénea puede verse como una ecuación diferencial donde la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede escribirse en función de la variable $u = \frac{y}{x}$ $(y = ux)$, o en función de la variable $v = \frac{x}{y}$ $(x = vy)$, pues de (3.2.3) tenemos

$$\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{dy}{dx} = f(x,ux) = x^0 f(1,u) = f(1,u) = f\big(1,\tfrac{y}{x}\big),\ \text{ó} \\ \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{dy}{dx} = f(vy,y) = y^0 f(v,1) = f(v,1) = f\big(\tfrac{x}{y},1\big). \end{array}$$

Debido a esto último, el método para resolver la ecuación homogénea (3.2.2) sugiere hacer alguno de los cambios de variable $y = ux$ ó $x = vy$. La ventaja de efectuar esta mudanza de variable es que las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3) se transforma siempre en una ecuación separable.

Por ejemplo haciendo el cambio de variable $y = ux$ $(u = \frac{y}{x})$ en (3.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\ u + x\frac{du}{dx} &= f(x,ux) = x^0 f(1,u) = f(1,u) \\ x\frac{du}{dx} &= f(1,u) - u \end{aligned}$$

esta última ecuación es separable. Haciendo la separación de variables, tenemos

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

El lector puede comprobar que el otro cambio de variable $x = vy$ también conduce a una ecuación separable (verifique!).

Ejemplo 3.2.4. Considere la ecuación diferencial

$$(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0.$$

Esta ecuación es homogénea, pues los coeficientes $M(x,y) = x+y$ y $N(x,y) = -x+y$ son ambas funciones homogéneas de igual grado. Resolvemos la ecuación usando la sustitución $y = ux$, $dy = udx + xdu$, luego:

$$\begin{aligned} (x+ux)\,dx - (x-ux)\,dy &= 0 \\ (x+ux)\,dx - (x-ux)(u\,dx + x\,du) &= 0 \\ (x + ux - ux + u^2 x)\,dx - x(x-ux)\,du &= 0 \\ x(1+u^2)\,dx - x^2(1-u)\,du &= 0. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es separable. Separando las variables x y u e integrando, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-u}{1+u^2}\, du &= \frac{dx}{x} \\
\int \Big(\frac{1}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2}\Big)\, du &= \frac{dx}{x} \\
\arctan u - \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) &= \log x + \tilde{c}. \\
\arctan u &= \log x(1+u^2)^{1/2} + \tilde{c}
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazamos la variable u por su valor $\frac{y}{x}$, de modo que la solución general es $\boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \log x\sqrt{1+\frac{y}{x}} + c,\ \ c \in \mathbb{R}}$.

Ejemplo 3.2.5. La ecuación diferencial

$$(2\sqrt{xy} - y)\, dx - x\, dy = 0$$

es homogénea (ambos coeficientes son funciones homogéneas del mismo grado). Resolvemos la ecuación usando la sustitución $y = ux$, $dy = udx + xdu$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{x(ux)} - ux)\, dx - x(udx + xdu) &= 0 \\
(2x\sqrt{u} - ux)\, dx - ux\, dx - x^2\, du &= 0 \\
(2x\sqrt{u} - 2ux)\, dx - x^2\, du &= 0 \\
2x(\sqrt{u} - u)\, dx - x^2\, du &= 0.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación es separable. Separando las variables x y u e integrando, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{2(\sqrt{u} - u)}\, dv &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{t}{t - t^2)}\, dt &= \frac{dx}{x}, \quad t = \sqrt{u} \\
\int \frac{1}{1 - t)}\, dt &= \frac{dx}{x}, \quad t = \sqrt{u} \\
.-\log(1-t) &= \log x + \tilde{c}
\end{aligned}$$

Quitando los logaritmos, obtenemos familia $x(1-t) = c$, luego, $x(1-\sqrt{u}) = x(1-\sqrt{\frac{y}{x}}) = c$. Así, la solución general es $\boxed{x - \sqrt{xy} = c,\ \ c \in \mathbb{R}}$.

Ejemplo 3.2.6. La ecuación

$$2x^3y\, dx + (x^4 + y^4)\, dy = 0$$

es homogénea (ambos coeficientes son funciones homogéneas de grado 4). Resolvemos la ecuación usando la sustitución $x = vy$, $dx = ydv + vdy$, y obtenemos:

$$\begin{aligned}
2(vy)^3 y(ydv + vdy) + ((vy)^4 + y^4)\, dy &= 0 \\
2v^3 y^5\, dv + (2v^4 y^4 + v^4 y^4 + y^4)\, dy &= 0 \\
2v^3 y^5\, dv + y^4(3v^4 + 1)\, dy &= 0
\end{aligned}$$

Separando las variables y y v en esta última ecuación e integrando, tenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{2v^3}{3v^4 + 1}\, dv &= -\frac{dy}{y} \\
\int \frac{1}{6t}\, dt &= -\frac{dy}{y}, \quad t = 3v^4 + 1 \\
\tfrac{1}{6} \log t + \log y = \tilde{c}
\end{aligned}$$

Quitando los logaritmos, obtenemos familia $y^6 t = c$, luego, $y^6(3v^4 + 1) = y^6(3\frac{x^4}{y^4} + 1) = c$. Así, la solución general es $\boxed{3x^4y^2 + y^6 = c,\ c \in \mathbb{R}}$.

Ejercicio 1. Resolver el problema de valores iniciales $xy' = y + xe^{y/x}$, $y(1) = 1$.

Ejercicio 2. Resolver la ecuación diferencial $xy' = 4y$ de dos formas: como ecuación separable y como ecuación homogénera. Compare ambas soluciones.

3.3. Ecuaciones exactas

Dada una familia de curvas $F(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ se puede generar una ecuación diferencial de primer orden hallando la diferencial total de F: $dF(x, y) = 0$, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = 0. \tag{3.3.1}$$

El método en el que se basa la solución de las ecuaciones exactas es el proceso inverso. Es decir, dada una ecuación diferencial en la forma:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

queremos ver si tal ecuación corresponde a la diferencial total de alguna función $F(x, y)$ de dos variables.

Definición 3.3.1. Una ecuación diferencial de primer orden

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{3.3.2}$$

es *exacta* en una región $U \subseteq \mathbb{R}^2$ del plano, si $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es una diferencial exacta, esto es, si existe una función diferenciable $F : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F}{\partial y}\, dy.$$

En otras palabras, la ecuación diferencial (3.3.2) es exacta si se verifica

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Ejemplos 3.3.2. La ecuación $y\, dx + x\, dy = 0$ es el diferencial de la familia $F(x, y) = xy = c$.
La ecuación $\dfrac{y\, dx - x\, dy}{y^2} = 0$ corresponde al diferencial de la familia de curvas $F(x, y) = \frac{x}{y} = c$.
La ecuación $\frac{x\, dx + y\, dy}{x^2+y^2} = 0$ es el diferencial de la familia $F(x, y) = \log(x^2 + y^2) = c$.
La ecuación $\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2} = 0$ es el diferencial de la familia de curvas $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} = c$.

Recordemos de los cursos de cálculo que, bajo ciertas condiciones, las segundas derivadas parciales mixtas de una función F coinciden. Este es el

Theorema 3.3.3 (Teorema de Schwarz)**.** *Suponga que la función $F : U \subseteq \mathbb{R}^2$ es dos veces diferenciable, y posee derivadas parciales de primer orden contínuas en un abierto U. Entonces, para todo punto $\mathbf{p} = (x, y) \in U$ vale*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\mathbf{p}). \tag{3.3.3}$$

Como consecuencia de este resultado, obtenemos un criterio que nos da una condición necesaria y suficiente para conocer cuándo una ecuación diferencial en la forma (3.3.2) es exacta. La prueba de este resultado nos proporciona un método para obtener la solución general.

Theorema 3.3.4 (Criterio para ecuaciones exactas)**.** *Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas, definidas en una región $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es exacta si y sólo si se verifica:*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \quad \textit{para todo } (x,y) \in U. \tag{3.3.4}$$

Prueba. [$\Rightarrow$] Supongamos que la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy = 0$ es exacta. Entonces, existe una función dos veces diferenciable $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ en U, y portanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}\Big) = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y), \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

Así, F posee derivadas parciales continuas en U. Por el Teorema de Schwarz, tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

[$\Leftarrow$] Recíprocamente, supongamos ahora que se verifica (3.3.4). Vamos a mostrar que la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ es una ecuación exacta, es decir, que existe una función $F(x,y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$.
Si $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$, entonces

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = G(x,y) + g(y), \tag{3.3.5}$$

donde $G(x,y)$ es una primitiva de $F(x,y)$ respecto de x. Ahora, derivamos parcialmente respecto de y la expresión obtenida para F en (3.3.5) y la igualamos a $N(x,y)$:

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(G(x,y) + g(y)\big) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + g'(y)$$

de donde despejamos $g'(y)$:

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y). \tag{3.3.6}$$

Afirmamos que esta expresión sólo depende de y, luego podemos integrar y obtener $g(y)$ que, sustituida en (3.3.5) nos da la expresión de $F(x,y)$. Queda por demostrar que (3.3.6) únicamente depende de y. Para ello, comprobamos que su derivada parcial respecto de x es cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\Big) &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}(x,y)\\ &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\Big)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

lo que comprueba nuestra afirmación.

Podemos resumir el método para resolver una ecuación exacta por medio del diagrama:

$$\begin{tikzcd} & F(x,y) \arrow[dr, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \\ M(x,y) \arrow[ur, "\int dx"] & & N(x,y). \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(x,y) \arrow[dl, "\frac{\partial}{\partial x}"'] & \\ M(x,y) & & N(x,y). \arrow[ul, "\int dy"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3.5. Considere la ecuación diferencial

$$(x^2+y^2+2x)\,dx+(2xy+3y^2)\,dy=0.$$

Comprobamos en primer lugar que la ecuación sea exacta. Como, $M(x,y)=x^2+y^2+2x$ y $N(x,y)=2xy+3y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+2x)=2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+3y^2)=2y.$$

Ambas derivadas coinciden, por lo que la ecuación es exacta. La solución general está dada por $F(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$, donde F es una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)=x^2+y^2+2x, \tag{3.3.7}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)=2xy+3y^2. \tag{3.3.8}$$

Calculamos $F(x,y)$. Integrando (3.3.7) respecto de x, obtenemos

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx=\int(x^2+y^2+2x)\,dx=\tfrac{1}{3}x^3+xy^2+x^2+g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y e igualando con (3.3.8), tenemos

$$2xy+g'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\big(\tfrac{1}{3}x^3+xy^2+x^2+g(y)\big)=\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)=2xy+3y^2.$$

De ahí que $g'(y)=2y^2$, e integramos. Portanto $g(y)=\int 3y^2\,dy=y^3+k$. Podemos tomar $k=0$, ya que en la solución final de la ecuación diferencial esta constante queda englobada en la constante c. Por tanto, la función F buscada es $F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2 + y^3$, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{\tfrac{1}{3}x^3 + xy^2 + x^2 + y^3 = c,\ c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.3.6. Resolver la ecuación diferencial

$$(\sin x \tan y + 1)\, dx = \cos x \sec^2 y\, dy.$$

En forma diferencial, la ecuación anterior es $(\sin x \tan y + 1)\, dx - \cos x \sec^2 y\, dy = 0$. Comprobamos primero que la ecuación sea exacta. Como, $M(x,y) = \sin x \tan y + 1$ y $N(x,y) = -\cos x \sec^2 y$, tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \tan y + 1) = \sin x \sec^2 y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\cos x \sec^2 y) = \sin x \sec^2 y.$$

Ambas derivadas coinciden, por lo que la ecuación es exacta. La solución general está dada por $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, donde F es una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \sin x \tan y + 1, \tag{3.3.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = -\cos x \sec^2 y. \tag{3.3.10}$$

Calculamos $F(x,y)$. Integrando (3.3.10) respecto de y, obtenemos

$$F(x,y) = \int N(x,y)\, dy = \int -\cos x \sec^2 y\, dy = -\cos x \tan y + g(x).$$

Derivando esta expresión respecto de x e igualando con (3.3.9), tenemos

$$\sin x \tan y + g'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\big(-\cos x \tan y + g(x)\big) = \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \sin x \tan y + 1.$$

De ahí que $g'(x) = 1$, e integramos. Portanto $g(x) = x + k$. Podemos tomar $k = 0$, ya que en la solución final de la ecuación diferencial esta constante queda englobada en la constante c. Por tanto, la función F requerida es $F(x,y) = -\cos x \tan y + x$, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x - \cos x \tan y = c,\ c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.3.7. Resolver la ecuación diferencial

$$y\,dx + 3x\,dy = 0.$$

Comprobamos primero si la ecuación es exacta. Como, $M(x,y) = y$ y $N(x,y) = 3x$, tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x) = 3.$$

Como las derivadas no son iguales, el criterio indica que la ecuación no es exacta. Portanto no es posible resolverla con este método.

Ejemplo 3.3.8. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{e^y + \cos x \cos y}{\sin x \sin y - xe^y}.$$

En forma diferencial, la ecuación anterior es $(e^y + \cos x \cos y)\,dx + (xe^y - \sin x \sin y)\,dy = 0$. Comprobamos primero si la ecuación es exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y + \cos x \cos y) = e^y - \cos x \sin y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y - \sin x \sin y) = e^y - \cos x \sin y.$$

Ambas derivadas coinciden, por lo que la ecuación es exacta. La solución general está dada por $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, donde F es una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = e^y + \cos x \cos y, \qquad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = xe^y - \sin x \sin y. \qquad (3.3.12)$$

Calculamos $F(x,y)$. Integrando (3.3.11) respecto de x, obtenemos

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (e^y + \cos x \cos y)\,dx = xe^y + \sin x \cos y + g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y e igualando con (3.3.12), tenemos

$$xe^y - \sin x \sin y + g'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(xe^y + \sin x \cos y + g(y)\big) = \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = xe^y - \sin x \sin y.$$

De ahí que $g'(y) = 0$, e integramos. Portanto $g(y) = k$, y podemos tomar $k = 0$. Por lo tanto, la función F requerida es $F(x,y) = xe^y + \sin x \cos y$, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{xe^y + \sin x \cos y = c, \ c \in \mathbb{R}.}$$

Un método alternativo para encontrar la función $F(x,y)$ que resuelve una ecuación exacta consiste en reescribir la ecuación, hasta llevarla a la forma de un diferencial $dF(x,y)=0$. Este método suele ser menos eficaz, pues no siempre es fácil reconocer la forma de los diferenciales. Mostramos un ejemplo:

Ejemplo 3.3.9. Resolver la ecuación diferencial

$$(x^3+xy^2)\,dx+(x^2y+y^3)\,dy=0.$$

Comprobamos primero si la ecuación es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy^2)=2xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+y^3)=2xy.$$

Ambas derivadas coinciden, por lo que la ecuación es exacta. La reescribirmos como

$$\begin{aligned}(x^3+xy^2)\,dx+(x^2y+y^3)\,dy &= x^3\,dx+xy(y\,dx+x\,dy)+y^3\,dy\\ &= d\big(\tfrac{1}{4}x^4\big)+d(xy)+d\big(\tfrac{1}{4}y^4\big)\\ &= d\big(\tfrac{1}{4}x^4+xy+\tfrac{1}{4}y^4\big).\end{aligned}$$

Así, la función F requerida es $F(x,y)=\frac{1}{4}x^4+xy+\frac{1}{4}y^4$, y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x^4+4xy+y^4=c,\ \ c\in\mathbb{R}.}$$

3.3.1. Factores integrantes

Algunas veces, una ecuación diferencial (3.3.2) que no es exacta puede modificarse para volverla una ecuación exacta. Esto se logra multiplicando la ecuación (3.3.2) por una función $u(x,y)$, de modo que

$$u(x,y)M(x,y)\,dx+u(x,y)N(x,y)\,dy=0$$

es una ecuación diferencial exacta.

Ejemplo 3.3.10. Muestre que la ecuación

$$(2e^y+3x\sin y)\,dx+(xe^y+x^2\cos y)\,dy=0.$$

no es exacta, pero que al multiplicarla por el factor x, se obtiene una ecuación diferencial exacta.

Solución. Esta ecuación no es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2e^y+3x\sin y)=2e^y+3x\cos y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y+x^2\cos y)=e^y+2x\cos y.$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación por x, obtenemos la ecuación diferencial

$$(2xe^y + 3x^2 \sin y)\, dx + (x^2e^y + x^3 \cos y)\, dy = 0.$$

Esta nueva ecuación satisface

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xe^y + 3x^2 \sin y) = 2xe^y + 3x^2 \cos y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^y + x^3 \cos y) = 2xe^y + 3x^2 \cos y,$$

y por lo tanto sí es exacta.

El factor $u(x, y)$ tal que, al multiplicar una ecuación diferencial por dicho factor ésta se convierte en exacta, se le llama *factor integrante*.

Observación 3.3.11. Ambas ecuaciones tienen esencialmente las mismas soluciones, pero al multiplicar por el factor integrante $u(x, y)$ es posible ganar o perder soluciones.

Para encontrar un factor integrante $u(x, y)$ de la ecuación (3.3.2), ya vimos que al multiplicar por $u(x, y)$ la ecuación diferencial $u(x, y)M(x, y)\, dx + u(x, y)N(x, y)\, dy = 0$ es exacta. Por lo tanto, debemos verificar que

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(u(x, y)M(x, y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(u(x, y)N(x, y)\big).$$

De esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} M\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial M}{\partial y} &= N\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial N}{\partial x}, \text{ o bien} \\ u\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) &= N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (3.3.13) \end{aligned}$$

(3.3.14)

La ecuación (3.3.13) es una ecuación diferencial parcial cuya solución es más complicada que la ecuación inicial. De ahí que obtener u de esta ecuación no es sencillo. Sin embargo, la ecuación (3.3.13) se simplifica si buscamos un factor de una forma determinada, por ejemplo de la forma $u = u(x)$ (es decir que u sólo depende de la variable x; o de la forma $u = u(y)$, (que sólo depende de y).

- **Factor integrante de la forma $u(x)$:**
  Supongamos que u es un factor integrante que sólo depende de x. Entonces $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}$. Luego la ecuación (3.3.13) queda:

  $$u\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = u(M_y - N_x) = N\frac{du}{dx}. \qquad (3.3.15)$$

  El término entre paréntesis es conocido, y por tanto la ecuación anterior es separable. Separando variables e integrando, obtenemos

  $$\int \frac{du}{u} = \int \frac{M_y - N_x}{N}\, dx.$$

Esta última ecuación tiene solución únicamente cuando la expresión del lado derecho sólo depende de x y es continua. En ese caso, obtenemos el factor integrante

$$\boxed{u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\, dx}.} \tag{3.3.16}$$

- **Factor integrante de la forma $u(y)$:**
  Supongamos que u es un factor integrante que sólo depende de y. Entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy}$. Luego la ecuación (3.3.13) queda:

  $$u\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = u(M_y - N_x) = -M\frac{du}{dy}. \tag{3.3.17}$$

  El término entre paréntesis es conocido, y por tanto la ecuación anterior es separable. Separando variables e integrando, obtenemos

  $$\int \frac{du}{u} = \int \frac{N_x - M_y}{M}\, dy.$$

  Esta última ecuación tiene solución únicamente cuando la expresión del lado derecho sólo depende de y y es continua. En ese caso, obtenemos el factor integrante

  $$\boxed{u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\, dy}.} \tag{3.3.18}$$

Método de solución: Dada la ecuación diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ se calcula $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$.

- Si $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ecuación no es exacta y buscamos un factor integrante.
- Si $\frac{M_y - N_x}{N}$ depende sólo de x, entonces un factor integrante es (**??**).
- Si $\frac{N_x - M_y}{M}$ depende sólo de y, entonces un factor integrante es (**??**).
- Si encontramos un factor integrante, se multiplica toda la ecuación diferencial por dicho factor y la ecuación obtenida se resuelve por el método para exactas. Hallando la solución $F(x, y) = c$.
- Se comprueba si al multiplicar por el factor integrante aparecen o se pierden soluciones.

Observación 3.3.12. En lugar de aprenderse las fórmulas (**??**) y (**??**), sugiero al lector que se aprenda el mecanismo: multiplicar la ecuación original por un factor u, y resolver obligando a que la ecuación sea exacta.

Ejemplo 3.3.13. Ya vimos que la ecuación del ejemplo 3.3.10

$$(2e^y + 3x \sin y)\, dx + (xe^y + x^2 \cos y)\, dy = 0$$

no es exacta. Hallamos un factor integrante para dicha ecuación.

- Proponemos un factor integrante de la forma $u(x)$: Tenemos

$$(2ue^y + 3ux\sin y)\,dx + (xue^y + x^2u\cos y)\,dy = 0$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}(2ue^y+3xu\sin y) = 2ue^y+3xu\cos y,\quad \frac{\partial}{\partial x}(xue^y+x^2u\cos y) = ue^y+xu'e^y+2xu\cos y+x^2u'\cos y.$$

Igualando ambas derivadas obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} 2ue^y + 3xu\cos y &= ue^y + xu'e^y + 2xu\cos y + x^2u'\cos y \\ ue^y + xu\cos y &= x(e^y + x\cos y)\tfrac{du}{dx} \\ u(e^y + x\cos y) &= x(e^y + x\cos y)\tfrac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es separable. Separando variables e integrando, da

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Como el lado derecho sólo depende de x esta ecuación tiene solución, que es dada por $u(x) = x$. De ahí que un factor integrante para la ecuación es $u(x) = x$. Multiplicamos la ecuación inicial por x, y resolvermos por el método para ecuaciones exactas, como ya se hizo en el ejemplo 3.3.10.

Ejemplo 3.3.14. Resolver la ecuación

$$(3x^2 - y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0.$$

Como las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial y}(-2xy) = -2x,\quad \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - y^2) = 6x$$

no son iguales, la ecuación no es exacta. Hallamos un factor integrante.

- Proponemos un factor integrante de la forma $u(x)$: Tenemos

$$(-2uxy)\,dx + (3ux^2 - uy^2)\,dy = 0.$$

Calculando las derivadas mixtas, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}(-2uxy) = -2ux,\quad \frac{\partial}{\partial x}(3ux^2 - uy^2) = 6ux + 3u'x^2 - u'y^2.$$

Igualando ambas derivadas obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -2ux &= 6ux + 3u'x^2 - u'y^2 \\ -8ux &= u'(3x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{8x}{y^2 - 3x^2}\, dx.$$

Como el lado derecho no depende sólo de x, esta ecuación no posee solución.

- Proponemos un factor integrante de la forma $u(y)$: Tenemos ahora las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial y}(-2uxy) = -2ux - 2u'xy, \quad \frac{\partial}{\partial x}(3ux^2 - uy^2) = 6ux.$$

Igualando ambas derivadas obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -2ux - 2u'xy &= 6ux \\ -8ux &= 2u'xy \\ -4u = u'y. \end{aligned}$$

Separando variables e integrando, tenemos

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-4}{y}\, dy.$$

Como el lado derecho sólo depende de y esta ecuación tiene solución, dada por $u(y) = y^{-4}$. De ahí que un factor integrante para la ecuación es $u(y) = y^{-4}$. Multiplicamos la ecuación inicial por y^{-4}, y resolvermos por el método para ecuaciones exactas.

El lector puede comprobar que la solución es $\boxed{y^2 - x^2 = cy^3}$.

Otros factores integrantes

Pendiente...

3.4. Ecuaciones lineales

Recordemos que una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3.4.1}$$

donde a_0, a_1 y g son funciones definidas en cierto intervalo (a, b). En ocasiones es útil reescribir la ecuación (3.4.1) en la *forma normal* (o *forma canónica*)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \tag{3.4.2}$$

donde $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ son funciones definidas en (a, b), esto es $a_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.
Clasificamos las ecuaciones lineales de la siguiente forma: Cuando la función $f(x)$ en el lado derecho de la ecuación (3.4.2) es zero, decimos que la ecuación diferencial (3.4.2) es *homogénea.* Cuando $f(x) \neq 0$, decimos que la ecuación es *no homogénea.*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad &= \quad \text{homogénea,} \\ \tfrac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad &= \quad \text{no homogénea.} \end{aligned}$$

Usualmente decimos que $y' + p(x)y = 0$ es la ecuación homogénea *asociada* a $y' + p(x)y = f(x)$.

Las ecuaciones diferenciales lineales se comportan de forma análoga a las ecuaciones algebraicas lineales. Recuerde de sus cursos de álgera lineal que si tenemos una ecuación algebraica homogénea

$$a_1x + a_0y = 0, \tag{3.4.3}$$

las soluciones constituyen un subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^2$ (el lugar geométrico de los puntos solución es una recta que pasa por el origen). Este subespacio V es de dimensión 1. Similarmente, si tenemos una ecuación algebraica no homogénea

$$a_1x + a_0y = c, \;\; c \neq 0, \tag{3.4.4}$$

las soluciones constituyen un subespacio afin A de $\mathbb{R}^2$, de la forma $A = V + s_p$, donde V es el espacio solución de la ecuación homogénea (3.4.3), y s_p es una solución particular de la ecuación (3.4.4). Observe que ahora el lugar geométrico de los puntos solución es la recta anterior trasladada por la solución particular s_p.

Veremos ahora que la ecuaciones diferenciales lineales presentan el mismo tipo de comportamiento. Denotamos por $C(a, b) = \{f : (a, b) \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$ al conjunto de las funciones continuas en el intervalo (a, b).

Proposición 3.4.1. *El conjunto de las soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \tag{3.4.5}$$

es un subespacio vectorial de $C(a, b)$*.*

(a) (b)

Figura 3.1: **Subespacio vectorial vs. subespacio afin**. *(a) El conjunto solución de la ecuación homogénea $y' + p(x)y = 0$ forma un subespacio vectorial de dimensión 1 en $\mathbb{R}^2$. (b) El conjunto solución de la ecuación no homogénea $y' + p(x)y = f(x)$ forma un subespacio afin de dimensión 1. Este subespacio afin es la traslación del subespacio vectorial en (a) por una solución particular $\mathbf{s}_p$.*

Prueba. Sean $y_1(x), y_2(x)$ soluciones de (3.4.5). Entonces $y_1'+p(x)y_1 = 0$ y $y_2'+p(x)y_2 = 0$. Basta mostrar que cualquier combinación lineal $c_1y_1+c_2y_2$ de y_1 y y_2 también es solución. De hecho, si $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (c_1y_1 + c_2y_2)' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1y_1' + c_2y_2' + p(x)y_1 + p(x)y_2 \\ &= c_1(\underbrace{y_1' + p(x)y_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{y_2' + p(x)y_2}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

Denotamos por y_h a la solución general de la ecuación lineal homogénea (3.4.5).

Proposición 3.4.2. *El conjunto de las soluciones de la ecuación lineal no homogénea*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \tag{3.4.6}$$

es un subespacio subespacio afin. Tal solución está dada por $y(x) = y_p + y_h$, donde y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea (3.4.6), y y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Prueba. Sea $y_p(x)$ una solución de (3.4.6), $y_h(x)$ la solución general de (3.4.5). Provamos que $y(x) = y_p + y_h$ también es solución de (3.4.6).
De hecho,

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= (y_p + y_h)' + p(x)(y_p + y_h) = y_p' + y_h' + p(x)y_p + p(x)y_h \\ &= \underbrace{y_p' + p(x)y_p}_{=f(x)} + \underbrace{y_h' + p(x)y_h}_{=0} = f(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, mostramos ahora que toda solución de la ecuación no homogénea (3.4.6) es necesariamente de la forma y_p+y_h. En efecto, $y(x), y_p$ son soluciones de (3.4.6), entonces

$$(y - y_p)' + p(x)(y - y_p) = y' - y_p' + p(x)y - p(x)y_p = \underbrace{y' + p(x)y}_{=f(x)} - (\underbrace{y_p' + p(x)y_p}_{=(x)}) = 0,$$

de modo que $y - y_p$ es solución de la ecuación homogénea asociada (3.4.5), y portanto $y - y_p = y_h$. Luego, $y = y_p + y_h$.

Estas dos últimos resultados, proporcionan un método simple para encontrar la solución general de una ecuación diferencial lineal $y' + p(x)y = f(x)$:

Paso 1: Hallar la solución general y_h de la ecuación homogénea asociada $y' + p(x)y = 0$.

Paso 2: Identificar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea $y' + p(x)y = f(x)$.

Paso 3: Sumar $y(x) = y_p + y_h$.

Explicamos cada paso a continuación.

- Para resolver la ecuación homogénea asociada $y' + p(x)y = 0$, note que ésta es una ecuación separable
$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$
Integrando, obtenemos $\log y = -\int p(x)\,dx + \tilde{c}$ por lo que
$$y_h(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{3.4.7}$$

- Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea, aplicamos el método de *variación de parámetros*. Explicamos este método a continuación. Ya vimos que la solución de la ecuación homogénea asociada es de la forma (3.4.7). Observe que el conjunto solución es el espacio de todos múltiplos de una función base
$$y_1(x) = e^{-\int p(x)\,dx}.$$
El método de variación de parámtros consiste en suponer que la solución particular de la ecuación no homogénea (3.4.6) es también un múltiplo de y_1; sólo que en lugar de ser un múltiplo constante, vamos a suponer una solución particular y_p de la forma
$$y_p(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{3.4.8}$$
donde $u(x)$ es una función que depende de x. Esta idea de extender el parámetro c a una función, hace que haya más posibilidades para encontrar nuevas funciones que satisfacan la ecuación diferencial (3.4.6).

  Así, hallar $y_p(x)$ se reduce a encontrar un parámetro $u(x)$ apropiado. Para ello, sustituimos $y_p = u(x)e^{-\int p(x)\,dx}$ en la ecuación no homogénea:
$$\begin{aligned} f(x) &= y_p' + p(x)y_p = \left(u(x)e^{-\int p(x)\,dx}\right)' + p(x)u(x)e^{-\int p(x)\,dx} \\ &= u'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - p(x)u(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)u(x)e^{-\int p(x)\,dx} \\ &= u'e^{-\int p(x)\,dx}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es separable. Haciendo la separación de variables, obtenemos $du = f(x)e^{\int p(x)\,dx}$, de modo que

$$u(x) = \int \Big(f(x)e^{\int p(x)\,dx}\Big)\,dx + k.$$

Como requerimos sólo una solución particular, usualmente elegimos $k = 0$. De ahí que la solución particular y_p es

$$y_p = u(x)y_1(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx,$$

Portanto, la solución general de la ecuación lineal no homogéneal (3.4.6) es

$$y(x) = y_p + y_h = e^{-\int p(x)\,dx}\Big(\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\Big). \tag{3.4.9}$$

3.4.1. Usando factor integrante

Un método alternativo para hallar la solución de la ecuación lineal (**??**) consiste en encontrar un factor integrante, de modo que al multiplicar por este factor, la ecuación se vuelve una ecuación fácil de resolver. Observando la ecuación detenidamente, el lado izquierdo $y' + p(x)y$ no recuerda la fórmula de la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dx}\big(w(x)y\big) = w(x)y' + w'(x)y.$$

Lo que haremos es buscar un factor integrante de la forma $w(x)$, de modo que el lado derecho de la ecuación

$$w(x)y' + w(x)p(x)y = w(x)f(x) \tag{3.4.10}$$

sea justamente la derivada del producto $w(x)y$. Así

$$w(x)y' + w(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\big(w(x)y\big) = w(x)y' + w'(x)y \;\Rightarrow\; w(x)p(x)y = w'(x)y \;\Rightarrow\; wp = w'$$

Esta última ecuación es separable, $\frac{ddw}{dw} = p(x)\,dx$ con solución $w(x) = e^{\int p(x)\,dx}$. De ahí que podemos reescribir la ecuación (3.4.10) como

$$\frac{d}{dx}\big(w(x)y\big) = w(x)f(x).$$

Integrando ambos lados respecto de x, por el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos

$$w(x)y = \int \frac{d}{dx}\big(w(x)y\big)\,dx = \int f(x)w(x)\,dx = \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c,$$

y por lo tanto, la solución $y(x)$ de la ecuación no homogénea es

$$\begin{aligned} y(x) &= \tfrac{1}{w(x)}\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c \\ &= e^{-\int p(x)\,dx}\Big(\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\Big), \end{aligned}$$

que es la misma expresión obtenida en (3.4.9).

Observación 3.4.3. Existen varios métodos para resolver ecuaciones lineales, pero todos conducen de alguna forma a la ecuación (3.4.10). Sugiero que el lector no memorice esta fórmula, puesto que puede confundirse con los otros factores integrantes que vimos para ecuaciones exactas.
Entre los métodos descritos anteriormente, recomiendo al lector el que consiste en hallar la solución en dos pasos: primero y_h, la solución de la ecuación homogénea asociada; luego y_p, una solución particular de la no homogénea. Este método resulta ser simple de aplicar, y es el que suele utilizarse al resolver ecuaciones lineales de orden superior.

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 3.4.4. La ecuación $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ es lineal en y. Hallamos la solución general:

- Hallamos y_h: La ecuación homogénea asociada es $y' + 2xy = 0$. Haciendo separación de variables, obtenemos
$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx,$$
y su solución es $\log y = -x^2 + \tilde{c}$, de modo que $y_h(x) = ce^{-x^2}$.

- Hallamos y_p: Proponemos $y_p = u(x)e^{-x^2}$. Sustituyendo y_p en la ecuación original, tenemos
$$y_p' + 2xy_p = \left(u(x)e^{-x^2}\right)' + 2xu(x)e^{-x^2} = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2} + 2xue^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$
Luego, $u' = 2x \;\Rightarrow\; u(x) = x^2$ (hicimos la constante $k = 0$). De ahí que $y_p(x) = x^2e^{-x^2}$.

Portanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y(x) = x^2e^{-x^2} + ce^{-x^2},\; c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.4.5. La ecuación diferencial $y' + \frac{y}{x} = 3x$ es lineal en y.

- Hallamos y_h: La ecuación homogénea asociada es $y' + \frac{y}{x} = 0$. Haciendo separación de variables, obtenemos
$$\int \frac{dy}{y} = \int -\tfrac{dx}{x},$$
y su solución es $\log y = -\log x + \tilde{c}$, de modo que $y_h(x) = \frac{c}{x}$.

- Hallamos y_p: Proponemos $y_p = u(x)\frac{1}{x}$. Sustituyendo y_p en la ecuación original, tenemos
$$y_p' + \tfrac{1}{x}y_p = \left(u(x)\tfrac{1}{x}\right)' + \tfrac{1}{x^2}u(x) = u'\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2}u + \tfrac{1}{x^2}u = 3x.$$
Luego, $u'\frac{1}{x} = 3x \;\Rightarrow\; u' = 3x^2 \;\Rightarrow\; u(x) = x^3$ (hicimos la constante $k = 0$). De ahí que $y_p(x) = x^2$.

Portanto la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{y(x) = x^2 + c\tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{x}(x^3 + c),\ c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.4.6. La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$ no es lineal en y. Sin embargo, si consideramos y como pa variable independiente, x la variable dependiente, podemos escribir

$$\tfrac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y,$$

que es ahora una ecuación diferencial lineal en x.

- Hallamos x_h: La ecuación homogénea asociada es $x' - x\cos y = 0$. Haciendo separación de variables, obtenemos

  $$\int \frac{dx}{x} = \int \cos y \, dy,$$

  y su solución es $\log x = \sin y + \tilde{c}$, de modo que $x_h(y) = ce^{\sin y}$.

- Hallamos x_p: Proponemos $x_p = u(y)e^{\sin y}$. Sustituyendo x_p en la ecuación original, tenemos

  $$x_p' - x_p \cos y = \big(u(y)e^{\sin y}\big)' - u(y)e^{\sin y}\cos y = u'e^{\sin y} + ue^{\sin y}\cos y - ue^{\sin y}\cos y = \sin 2y.$$

  Luego, $u' = \sin 2y\, e^{-\sin y}$. De ahí que $\frac{du}{dy} = \frac{2\sin y \cos y}{e^{\sin y}} \;\Rightarrow\; u = \int \frac{2\sin y\cos y}{e^{\sin y}}\, dy$. Esta integral se hace por sustitución ($t = \sin y$), y obtenemos $u(y) = -2(1 + \sin y)e^{-\sin y}$. Así $x_p(y) = -2(1 + \sin y)$,

y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\boxed{x(y) = -2(1 + \sin y) + ce^{\sin y},\ c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.4.7. Resolver la ecuación diferencial

$$y' + y = f(x), \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

con la condición inicial $y(0) = 0$.

- Hallamos y_h: La ecuación homogénea asociada es $y' + y = 0$. Haciendo separación de variables, obtenemos $\int \frac{dy}{y} = \int -x\, dx$, y su solución es $y_h(x) = ce^{-x}$.

- Para encontrar la solución particular, como la función $f(x)$ está definida por secciones, debemos partir nuestra ecuación diferencial en dos casos, cuando $0 \le x \le 1$, y cuando $x > 1$.

- Para $0 \leq x \leq 1$. Proponemos $y_p = u(x)e^{-x}$. Sustituyendo y_p en la ecuación original, tenemos

$$y_p' + y_p = \big(u(x)e^{-x}\big)' + u(x)e^{-x} = u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = 1.$$

  Luego, $u' = e^x \;\Rightarrow\; u(x) = e^x$. De ahí que $y_p(x) = 1$, y la solución general en este intervalo es $y(x) = 1 + c_1e^{-x}$.

- Para $x > 1$. Proponemos $y_p = u(x)e^{-x}$. Sustituyendo y_p en la ecuación original, tenemos

$$y_p' + y_p = \big(u(x)e^{-x}\big)' + u(x)e^{-x} = u'e^{-x} - ue^{-x} + ue^{-x} = 0.$$

  Luego, $u' = 0 \;\Rightarrow\; u(x) = 0$. De ahí que $y_p(x) = e^{-x}$, y la solución general en este intervalo es $y(x) = c_2e^{-x}$.

Juntando ambos miembros, obtenemos la solución general $y(x) = \begin{cases} 1 + c_1e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ c_2e^{-x} & x > 1. \end{cases}$ Recordemos que la solución de cualquier ecuación diferencial debe ser una función continua. De ahí que $y(x)$ debe cumplir la condición

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^+} y(x),$$

y portanto $1 + c_1e^{-1} = c_2e^{-1} \;\Rightarrow\; c_2 = e(1 + c_1e^{-1}) = e + c_1$. Así,

$$y(x) = \begin{cases} 1 + c_1e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ (e + c_1)e^{-x} & x > 1. \end{cases}$$

Evaluando la condición inicial $y(0) = 0$, obtenemos $c_1 = -1$. Portanto, la solución es

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ (e - 1)e^{-x} & x > 1. \end{cases}}$$

Cuando queremos resolver un problema de valor inicial $y' + p(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, la ecuación (3.4.9) adopta la forma

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds}\,dt\Big).$$

Ejercicio 3. Resolver $x^2y' + xy = \sin x$, $y(1) = 5$.

3.5. Sustituciones diversas

En esta sección presentamos diversos métodos para facilitar la resolución de una ecuación diferencial de primer orden. Ya vimos que una estrategia para resolver una ecuación consisten en hallar un factor integrante, de modo que al multiplicar por este factor, la ecuación se vuelve separable o exacta.

Una estrategia diferente consiste en hacer un cambio de variable apropiado, a modo que la nueva ecuación diferencial se vuelva alguna de las ya estudiadas anteriormente. Por ejemplo, el método para resolver ecuaciones homogéneas visto en la sección 3.2 efectua uno de los cambios de variable $y = ux$ ó $x = vy$ para transformarse en una ecuación separable. Presentamos algunas sustituciones que resultan útiles.

3.5.1. Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by + c)$

Se reduce a una ecuación separable al hacer la sustitución $z = ax+by+c$, $dz = a\,dx+b\,dy$.

Ejemplo 3.5.1. Resolver la ecuación $dx - \csc^2(x - y + 1)\,dy = 0$.
Hacemos la sustitución $z = x - y + 1$, $dz = dx - dy$. La ecuación se transforma en

$$dx - \csc^2(z)\,(dx - dz) = (1 - \csc^2 z)\,dx + \csc^2 z\,dz = 0,$$

que es una ecuación separable. Haciendo la separación e integrando, obtenemos

$$\int dx = \int \frac{-\csc^2 z}{1 - \csc^2 z}\,dz = \int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 z - 1}\,dz = \int \frac{1}{\cos^2 z}\,dz$$

cuya solución es $x = tan(z) + c$. Sustituyendo de nuevo el valor de z, obtenemos

$$\boxed{x = \tan(x - y + 1) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 3.5.2. Resolver la ecuación $y' = 1 + e^{2x+3y-5}$.
Hacemos la sustitución $z = 2x + 3y - 5$, $\frac{dz}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx}$. La ecuación se transforma en

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{dz}{dx} - 2) = 1 + e^z,$$

o equivalentemente $\frac{dz}{dx} = 3e^z + 5$, una ecuación separable. Haciendo la separación e integrando

$$3\,dx = \frac{1}{e^z + 5/3}\,dz = \frac{du}{u(u - 5/3)} = \left(\frac{-3/5}{u} + \frac{3/5}{u - 5/3}\right)du$$

Luego, $5x + c = \log(u - \frac{5}{3}) - \log u \ \Rightarrow\ \frac{u-5/3}{u} = ce^{5x}$. De ahí que $u(x) = \frac{5/3}{1-ce^{5x}}$, y portanto $e^z + \frac{5}{3} = \frac{5/3}{1-ce^{5x}}$. Sustituyendo de nuevo el valor de z, obtenemos

$$\boxed{\tfrac{3}{5}e^{2x+3y-5} + 1 = \tfrac{1}{1-ce^{5x}},\ \ c \in \mathbb{R}.}$$

3.5.2. Ecuaciones de la forma $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Tenemos dos casos:

- Cuando $a_1b_2 \neq a_2b_1$: Se reduce a una ecuación homogénea trasladando el origen de coordenadas al punto de intersección $p = (x_0, y_0)$ de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Esto se consigue haciendo las sustituciones

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_0, \quad dx = d\bar{x}, \\ y &= \bar{y} + y_0, \quad dy = d\bar{y}. \end{aligned}$$

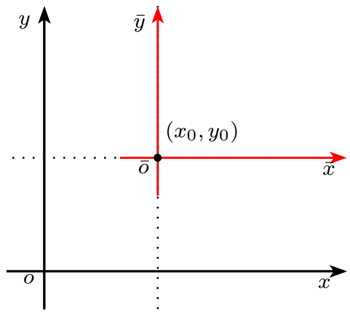


Figura 3.2: Traslación del eje de coordenadas. El nuevo sistema de referencia tiene coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$.

- Cuando $a_1b_2 = a_2b_1$: las rectas no se intersectan. En este caso, la ecuación se reduce a la forma $y' = f(ax + by + c)$

Ejemplo 3.5.3. Resolver $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$.
Como el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, el sistema $x + y - 2 = 0$, $x - y + 4 = 0$ tiene solución única. Tal solución es $(x_0, y_0) = (-1, 3)$. De ahí que hacemos el cambio de variables

$$x = \bar{x} - 1,\ \ y = \bar{y} + 3.$$

La ecuación diferencial se convierte en

$$\big((\bar{x} - 1) + (\bar{y} + 3) - 2\big)\,d\bar{x} + \big((\bar{x} - 1) - (\bar{y} + 3) + 4\big)\,dy = (\bar{x} + \bar{y})\,d\bar{x} + (\bar{x} - \bar{y}), dy\bar{y} = 0.$$

Esta última ecuación es homogénea. Ya se puede resolver con el método para ecuaciones homogéneas.

Ejemplo 3.5.4. Resolver $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$. Como el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, el sistema $x + y + 1 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$ no tiene solución. Sin embargo, podemos optar por hacer alguno de los siguientes cambios de variable:

- Observe que 2x+2y-1 = 2(x+y+1)-3, de modo que podemos hacer la sustitución $z = x + y + 1$, $dz = dx + dy$ y obtenemos

$$z\,dx + (2z - 3)(dz - dx) = 0,$$

lo que resulta en $(-z + 3)\,dx + (2z - 3)\,dz = 0$, que es una ecuación separable.

- O hacemos la sustitución $z = x + y$, $dz = dx + dy$ y obtenemos

$$(z + 1)\,dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0,$$

lo que resulta en $(-z + 2)\,dx + (2z - 1)\,dz = 0$, que es una ecuación separable.

En cualquier caso, la ecuación ya puede resolverse por separación de variables.

3.5.3. Ecuaciones casi-homogéneas

Estas ecuaciones tienen la forma de una ecuación homogénes, con la excepción de un término. Se reduce a una ecuación homogénea haciendo la sustitución $y = z^\alpha$ ó $x = z^\alpha$ para algún valor apropiado de α.

Ejemplo 3.5.5. Resolver la ecuación $2xy^3\,dx + (x^2y^2 - 1)\,dy = 0$.
Observe que los términos $2xy^3$ y x^2y^2 son ambos de grado 4, mientras que -1 es un término de grado 0. Como el -1 acompaña al diferencial dy, proponemos la sustitución $y = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$:

$$2xz^{3\alpha}\,dx + (x^2z^{2\alpha} - 1)\,\alpha z^{\alpha-1}\,dz = 0.$$

Buscamos ahora el valor de α apropiado que hace la ecuación anterior sea homogénea. El término $2xz^{3\alpha}$ es de grado $3\alpha + 1$, el término $\alpha x^2z^{2\alpha}z^{\alpha-1}$ es de grado $3\alpha + 1$, y el último término $-\alpha z^{\alpha-1}$ es de grado $\alpha - 1$:

$$\underbrace{2xz^{3\alpha}}_{\text{gr }3\alpha+1}\,dx + (\underbrace{\alpha z^{\alpha-1}x^2z^{2\alpha}}_{\text{gr }3\alpha+1} - \underbrace{\alpha z^{\alpha-1}}_{\text{gr }\alpha-1})\,dz = 0.$$

De ahí que para que la ecuación anterior sea homogénea, debe cumplirse que $3\alpha+1 = \alpha-1$, luego $2\alpha = -2$, y por lo tanto $\alpha = -1$. Así, la sustitución adecuada es $y = z^{-1}$. En ese caso, la ecuación se convierte en

$$2xz^{-3}\,dx - (x^2z^{-4} - z^{-2})\,dz = 0,$$

que ya puede resolverse con el método de ecuaciones homogéneas.

3.5.4. Ecuación de Bernoulli $y' + p(x)y = f(x)y^n$

- Cuando $n = 0$ ó $n = 1$, tenemos una ecuación lineal.

- Cuando $n \neq 0, 1$, se reduce a una ecuación lineal haciendo la sustitución $z = y^{1-n}$. En este caso, la ecuación original $y' + p(x)y = f(x)y^n$ se transforma en

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = f(x)y^n &\Rightarrow (1-n)y^{-n}y' + (1-n)p(x)y^{-n}y = (1-n)f(x)y^{-n}y^n \\ &\Rightarrow z' + (1-n)p(x)z = (1-n)f(x), \end{aligned}$$

una ecuación lineal en la variable z.

Ejemplo 3.5.6. Resolver la ecuación $xy' + y = y^2 \log x$.
Tenemos una ecuación de Bernoulli con $n = 2$. Haciendo la sustitución $z = y^{1-2} = y^{-1}$, obtenemos $z' = -y^{-2}y'$. Luego, la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} xy' + y = y^2 \log x &\Rightarrow x(-y^{-2}z') + z^{-1} = z^{-2} \log x \\ &\Rightarrow -xz^{-2}z' + z^{-1} = z^{-2} \log x \\ &\Rightarrow xz' - z = -\log x, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en z.

Ejemplo 3.5.7. Resolver la ecuación $y' = y(xy^{-6} + 1)$.
La ecuación puede reescribirse como $y' + y = xy^{-5}$, de modo que es una ecuación de Bernoulli con $n = -5$. Haciendo la sustitución $z = y^{1-(-5)} = y^6$, obtenemos $z' = 6y^5y'$. Luego, la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} y' + y = xy^{-5} &\Rightarrow \tfrac{1}{6}y^{-5}z' + y = xy^{-5} \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{6}z' + y^6 = x \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{6}z' + z = x, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en z.

3.5.5. Ecuación de Riccati $y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$

Conocida una solución particular y_p, se reduce a una ecuación de Bernoulli haciendo la sustitución $y = z + y_p$. En este caso, lo difícil es construir o encontrar una solución particular. En algunos casos, esto puede hacerse estudiando la función $f(x)$ que aparece en el lado derecho de la ecuación.

Ejemplo 3.5.8. Resolver la ecuación $y' + y^2 = -2x + x^2$.

- Hallamos una solución particular: El lado derecho de la ecuación es $f(x) = -2x+x^2$, un polinomio de grado 2. Proponemos entonces una solución particular y_p de forma polinomial. Vamos a determinar el grado de este polinomio y_p.
  Suponga que $(y_p) = n$. Entonces el grado de la derivada es $(y_p') = n-1$ y el grado del término y_p^2 es $(y_2) = 2n$. Luego los grados de ambos lados de la ecuación deben ser iguales. Así
  $$(y_p' + y_p^2) = \max\{(y_p'), (y_p^2)\} = \max\{n-1, 2n\} = 2n = 2 = (f).$$
  Esto implica que el grado de y_p es $n = 1$. Proponemos entonces una solución particular de la forma $y_p = ax+b$. Tenemos $y_p' = a$ y $y_p^2 = (ax+b)^2 = a^2x^2+2abx+b^2$. Luego,
  $$y_p' + y_p^2 = a + (a^2x^2 + 2abx + b^2) = a^2x^2 + 2abx + (b^2 + a) = -2x + x^2$$
  y por lo tanto $a^2 = 1$, $2ab = -2$ y $b^2 + a = 0$. De ahí que $a = -1$ y $b = 1$, y la solución particular de la ecuación es $y_p = 1 - x$.
- Ahora, hacemos la sustitución $y = z + (1-x) = z - x + 1$, $y' = z' - 1$. La ecuación de Riccati se transforma en
  $$\begin{aligned} y' + y^2 = -2x + x^2 \quad &\Rightarrow \quad (z'-1) + (z - x + 1)^2 = \\ &\Rightarrow \quad z' - 1 + z^2 - x^2 - 2xz - 2x + 2z + 1 = -2x + x^2 \\ &\Rightarrow \quad z' + (2-2x)z + z^2 = 0, \end{aligned}$$
  que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$.

3.5.6. Otras sustituciones

En ocasiones, un cambio de variable apropiado puede transformar una ecuación diferencial en otra que es más fácil de resolver.

Ejemplo 3.5.9. Resolver la ecuación $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
La ecuación es exacta. Sin embargo, también puede resolverse haciendo la sustitución $z = x^2 - y$. En ese caso, $dz = 2x\,dx - dy$. La ecuación se transforma en
$$\begin{aligned} 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x(1 + \sqrt{z})\,dx - \sqrt{z}(dz - 2x\,dx) = 0 \\ &\Rightarrow \quad 2x\,dx - \sqrt{z}\,dz = 0, \end{aligned}$$

que es una ecuación separable.

Observación 3.5.10. Existen muchas más técnicas para resolver ecuación de primer orden, que no serán estudiadas aquí por falta de tiempo. El lector interesado puede consultar la bibliografia sugerida.

Capítulo 4

Ecuaciones de orden superior

Comenzamos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales de orden dos o mayor. Centramos nuestro estudio en las ecuaciones lineales de orden superior. Primero porque son las más simples de resolver, y segundo porque son las que màs suelen aparecen en las aplicaciones a la ingeniería.
En este y en los siguientes dos capítulos, presentamos las técnicas clásicas para resolver ecuaciones lineales. Al finalizar, haremos una breve nota de lo que sucede en el caso de las ecuaciones no lineales.

En esta aula hacemos una introducción a la teoria de las ecuaciones lineales.

4.1. Teoria de las ecuaciones lineales

Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma

$$p_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \ldots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = g(x), \tag{4.1.1}$$

donde las $p_i(x)$ y $g(x)$ son funciones de la variable independiente x. Podemos reescribir una ecuación lineal en su *forma normal*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \tag{4.1.2}$$

haciendo $a_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_n(x)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y $f(x) = \frac{g(x)}{p_n(x)}$. Decimos que la ecuación diferencial lineal (4.1.2) está definida en el intervalo (a, b) cuando todas la funciones coeficiente $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ y $f(x)$ están definidas en ese intervalo.

Si hacemos la analogía con las ecuación lineales de primer orden,lo esperado es que la solución general de una ecuación lineal de orden superior sea una familia n-paramétrica de funciones.

Al igual que en la teoria de ecuaciones de orden 1, además de hallar la solución general de una ecuación, podemos adicionar condiciones específicas, y resolver la solución particular de la ecuación que satisface dichas condiciones. En las ecuaciones de orden 1, la

solución general estaba dada por una familia 1-paramétrica; y para encontrar una una solución particular, era preciso añadir una condición inicial. En contraste, en el caso de las ecuaciones de orden n, la solución general está dada por una familia n-paramétrica De ahí que para resolver una solución particular es necesario imponer n condiciones iniciales (una para cada parámetro).
Existe una diferencia básica dependiendo de cómo especificamos estas condiciones iniciales. En las ecuaciones de orden superior tenemos dos tipo de problemas: los problemas de valor inicial, y los problemas de valor en la frontera.

Definición 4.1.1. Un *problema de valor inicial* de una ecuación lineal de orden n, es de la forma

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \\ \text{sujeto a } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'' \ \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Es decir, un problema de valor inicial corresponde a imponer condiciones iniciales todas sobre un único punto (x_0, y_0) del dominio de la ecuación diferencial. La primera condición va sobre la función ($y(x_0) = y_0$ dice que la solución pasa por el punto (x_0, y_0)). La segunda condición va sobre la primera derivada ($y'(x_0) = y_0'$ indica que la solución tiene pendiente y_0' cuando $x = x_0$). El resto de condiciones recae cada una sobre siguiente derivada de la solución. Por ejemplo, para una ecuación diferencial de orden 2, las condiciones de un problema de valores iniciales se ilustran en la figura 4.1.

Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación, en donde la variable independiente o sus derivadas se especifican en diferentes puntos.

Definición 4.1.2. Un *problema de valor frontera* de una ecuación lineal de orden n, es de la forma

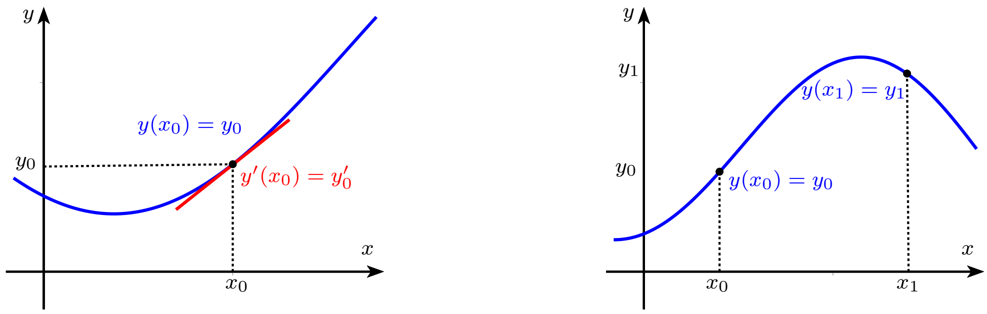
$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \\ \text{sujeto a } y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ y'(x_2) = y_2' \ \ldots\ y^j(x_k) = y_k^j. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Aquí las condiciones iniciales se especifican en puntos distintos. Podemos especificar valores de la solución en dos puntos diferentes, o imponer condiciones sobre las derivadas de orden superior en estos puntos. Por ejemplo, para una ecuación diferencial de orden 2, las condiciones de un problema de valor en la frontera se ilustran en la figura 4.1.
Para un problema de valor en la frontera de orden 2, $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, podemos adicionar distintos tipos de condiciones:

- $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$;
- $y'(x_0) = y_0'$, $y(x_1) = y_1$;
- $y(x_0) = y_0$, $y'(x_1) = y_1'$;
- $y'(x_0) = y_0'$, $y'(x_1) = y_1'$.

Tenemos el primer resultado importante

Theorema 4.1.3 (Teorema de Existencia y Unicidad)**.** *Sean $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), f(x)$ funciones definidas en el intervalo (a, b), y sea x_0 un punto cualquiera de (a, b). Entonces, existe solución única $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, para el problema de valores iniciales (4.1.3), definida en el intervalo (a, b).*



(a) (b)

Figura 4.1: **Problema de valor inicial vrs. problema de valor en la frontera**. *(a) Las condiciones de $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ se imponen en el mismo punto (x_0, y_0). (b) Las condiciones $y(x_0)$ y $y(x_1)$ se imponen en dos puntos distintos: sobre la frontera del intervalo $I = (x_0, x_1)$.*

Observación 4.1.4. El teorema anterior es una consecuencia directa del Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema de Picard) para ecuaciones de primer orden.

Ejemplo 4.1.5. Verificar que la función $y(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$ es solución del problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 3.$$

Como $y = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$, sus derivadas son $y' = -18e^{-2x} + 21e^{-3x}$ y $y'' = 36e^{-2x} - 63e^{-3x}$. Luego, al sustituir en la ecuación original, tenemos

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= (36e^{-2x} - 63e^{-3x}) + 5(-18e^{-2x} + 21e^{-3x}) + 6(9e^{-2x} - 7e^{-3x}) \\ &= (36 - 90 + 54)e^{-2x} + (-63 + 105 - 42)e^{-3x} = 0. \end{aligned}$$

Luego, $y(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$ es solución. Comprobamos ahora que cumple las condiciones requeridas:

$$y(0) = 9e^{-2(0)} - 7e^{-3(0)} = 2, \quad y'(0) = -18e^{-2(0)} + 21e^{-3(0)} = 3,$$

de modo que $y(x)$ es la solución requerida. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que esta es la única solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 4.1.6. Verificar que la familia de funciones, $y_c(x) = cx^2 + x + 3$, $c \in \mathbb{R}$, son todas soluciones del problema de valor inicial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 1.$$

Como $y_c = cx^2 + x + 3$, sus derivadas son $y'_c = 2cx + 1$ y $y''_c = 2c$. Luego, al sustituir en la ecuación original, tenemos

$$\begin{aligned} x^2y''_c - 2xy'_c + 2y_c &= x^2(2c) - 2x(2cx + 1) + 2(cx^2 + x + 3) \\ &= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 = 6. \end{aligned}$$

Luego, $y_c(x) = cx^2 + x + 3$ es solución, para cualquier valor de c. Comprobamos ahora tales soluciones cumplen las condiciones requeridas:

$$y(0) = c(0)^2 + 0 + 3 = 3, \quad y'(0) = 2c(0) + 1 = 1,$$

de modo que las $y_c(x)$ resuelven el problema. Observe que esto no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad. En forma normal, la ecuación del problema es $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{6}{x^2}$, luego es una ecuación definida en el intervalo $(\infty, 0)$ ó $(0, \infty)$, y las condiciones iniciales están en un punto que no es parte del dominio de la ecuación.

Importante: El Teorema de Existencia y unicidad sólo vale para problemas de valor inicial. Aunque las condiciones del teorema se cumplan, en un problema de valor en la frontera puede ocurrir que

- hay solución única,
- haya más de una solución,
- no exista solución.

Ejemplo 4.1.7. La función $y(x) = 3x^2 - 6x + 3$ es la solución del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(1) = 0, \; y(2) = 3,$$

en el intervalo $(0, \infty)$. (el lector puede verificar que es solución). La solución general de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$ está dada por

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x + 3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Luego, $y(x) = 3x^2 - 6x + 3$ es la única función de es familia 2-paramétrica que satisface las condiciones de frontera, demodo que el problema tiene solución única.

Ejemplo 4.1.8. La función $y(x) = 3x^2 - 6x + 3$ es la solución del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \quad y(1) = 0, \; y(2) = 3,$$

en el intervalo $(0, \infty)$. (el lector puede verificar que es solución). La solución general de la ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6$ está dada por

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x + 3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Luego, $y(x) = 3x^2 - 6x + 3$ es la única función de es familia 2-paramétrica que satisface las condiciones de frontera, demodo que el problema tiene solución única.

En ocasiones, un problema de valor en la frontera puede tener muchas solución, o no tener solución.

Ejemplo 4.1.9. Las funciones de la forma $y(x) = c\sin(4x)$, $c \in \mathbb{R}$, son todas soluciones del problema de valor en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0.$$

De hecho, $y' = 4c\cos(x)$ y $y'' = -16c\sin(4x)$. Luego, $y'' + 16y = -16c\sin(4x) + 16c\sin(4x) = 0$. Por otro lado, para cualquier valor de c, tenemos $y(0) = c\sin(0) = 0$ y $y(\pi) = c\sin(0) = 0$, y el problema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 4.1.10. El problema de valor en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 1,$$

no tiene solución. De hecho, la solución general de la ecuación $y'' + 16y = 0$ está dada por la familia 2-paramétrica

$$y(x) = c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora, $y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = c_1$ implica que $c_1 = 0$ y $y(\pi) = c_1\cos(4\pi) + c_2\sin(4\pi) = c_1 = 0$. Luego, la condición $y(\pi) = 1$ es imposible (o al menos es incompatible con la primera condición). De ahí que no existe solución que satisfaga ambas condiciones de frontera.

4.1.1. Ecuaciones homogéneas y no homogéneas

Al igual que como hicimos en el caso de orden 1, clasificamos las ecuaciones lineales de orden superior de la siguiente forma: cuando la función $f(x)$ en el lado derecho de la ecuación (4.1.2) es zero, decimos que la ecuación es *homogénea*. Cuando $f(x) \neq 0$, decimos que la ecuación es *no homogénea*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 &\quad = \quad \text{homogénea}, \\ y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) &\quad = \quad \text{no homogénea}. \end{aligned}$$

Usualmente decimos que $y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = 0$ es la ecuación homogénea asociada a $y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$.
Las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, presentan el mismo tipo de comportamiento que las de primer orden. Denotamos por $C(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | f \text{ es continua}\}$ al conjunto de las funciones continuas en el intervalo (a,b). Denotamos por $C^n(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} | f \text{ es } n \text{ veces diferneciable}\}$ al conjunto de las funciones con al menos n derivadas en el intervalo (a,b).

Proposición 4.1.11 (Principio de Superposición)**.** *El conjunto de las soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4.1.5}$$

es un subespacio vectorial de $C^n(a,b)$ de dimensión n.

Prueba. La prueba es idéntica a la que ya vimos en las ecuaciones lineales de primer orden:. Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones de (4.1.5). Entonces $y_1^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_1 = 0$ y $y_2^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_2 = 0$. Basta mostrar que cualquier combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ de y_1 y y_2 también es solución.
De hecho, si $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y &= (c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + \ldots + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_1 + a_0(x)y_2 \\ &= c_1(\underbrace{y_1^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{y_2^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_2}_{=0}) = 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que el conjunto solución es un subespacio vectorial de $C^n(a, b)$. En la próxima sección mostraremos que este espacio solución tiene exactamente dimensión n.

Denotamos por y_h a la solución general de la ecuación lineal homogénea (4.1.5).

Proposición 4.1.12. *El conjunto de las soluciones de la ecuación lineal no homogénea*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \tag{4.1.6}$$

es un subespacio subespacio afin de $C^n(a, b)$. Tal solución está dada por $y(x) = y_p + y_h$, donde y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea (4.1.6), y y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Prueba. La prueba es idéntica al caso de ecuaciones lineales de primer orden. Sea $y_p(x)$ una solución de (4.1.6), $y_h(x)$ la solución general de (4.1.5). Provamos que $y(x) = y_p + y_h$ también es solución de (4.1.6).
De hecho,

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y &= (y_p + y_h)^{(n)} + \ldots + a_0(x)(y_p + y_h) \\ &= y_p^{(n)} + y_h^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_p + a_0(x)y_h \\ &= \underbrace{y_p^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_p}_{=f(x)} + \underbrace{y_h^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_h}_{=0} = f(x). \end{aligned}$$

Recíprocamente, mostramos ahora que toda solución de la ecuación no homogénea (4.1.6) es necesariamente de la forma $y_p + y_h$. En efecto, $y(x), y_p$ son soluciones de (4.1.6), entonces

$$\begin{aligned} (y - y_p)^{(n)} + \ldots + a_0(x)(y - y_p) &= y^{(n)} - y_p^{(n)} + \ldots + a_0(x)y - a_0(x)y_p \\ &= \underbrace{y^{(n)} + \ldots + a_0(x)y}_{=f(x)} - (\underbrace{y_p^{(n)} + \ldots + a_0(x)y_p}_{=(x)}) = 0, \end{aligned}$$

de modo que $y - y_p$ es solución de la ecuación homogénea asociada (4.1.5), y portanto de la forma $y - y_p = y_h$. Luego, $y = y_p + y_h$.

4.1.2. Dependencia lineal de funciones

Definición 4.1.13. Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definidas en un intervalo (a,b) es *linealmente dependiente en* (a,b) si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, no todas cero, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in (a,b).$$

Caso contrario, decimos que las funciones son *linealmente independientes en* (a,b).

Ejemplo 4.1.14. Las funciones $\sin(2x)$ y $\cos x \sin x$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
De hecho, una conocida identidad trigonométrica nos dice que

$$\operatorname{sen}(2x) - 2\cos x \sin x = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.1.15. Las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$ y $f_4(x) = x^2$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$.
De hecho, la combinación lineal no trivial

$$f_1 - f_2 + 5f_3 + 0 \cdot f_4 = \sqrt{x} + 5 - (\sqrt{x} + 5x) + 5(x-1) + = \cdot x^2 = 0$$

es identicamente cero.

rem El concepto de dependencia lineal de funciones es análogo al de vectores en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo hay una diferencia importante: como las funciones cambian de valor según el punto x, la dependencia lineal de funciones depende del intervalo (a,b). rem

Ejemplo 4.1.16. Las funciones x^3 y $|x|^3$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si tenemos una combinación lineal $c_1 x^3 + c_2 |x|^3 = 0$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces para $x > 0$ tenemos $c_1 x^3 + c_2 x^3 = (c_1 + c_2)x^3 = 0$. Para $x < 0$, tenemos $c_1 x^3 - c_2 x^3 = (c_1 - c_2)x^3 = 0$. Esto produce el sistema de ecuaciones $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 - c_2 = 0$, cuya solución es $c_1 = c_2 = 0$. De ahí que las funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.
Sin embargo, las funciones x^3 y $|x|^3$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$. Observe que en ese caso, las funciones x^3 y $|x|^3$ coinciden, luego, $x^3 - |x|^3 = 0$ es una combinación lineal no trivial idénticamente cero. De ahí que son linealmente dependientes en ese intervalo.

Dimensión del espacio solución

Vamos a mostar ahora la parte pendiente del principio de superposición: el espacio solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es precisamente el orden de la ecuación.

Theorema 4.1.17. *El espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0, \tag{4.1.7}$$

es un subespacio vectorial de $C^n(a,b)$ de dimensión n.

Prueba. Ya vimos que el conjunto solución es un subespacio vectorial de $C^n(a,b)$. Mostramos ahora que la dimensión es exactamente n. Para ello, vamos a construir una base $\mathcal{B}$ del espacio solución que consiste exactamente de n elementos.
Sea $x_0 \in (a,b)$. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, la ecuación (4.1.7) admite soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tales que

$$\left.\begin{array}{lllll} y_1(x_0)=1, & y_1'(x_0)=0, & y_1''(x_0)=0, & \ldots & y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\\ y_2(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1, & y_2''(x_0)=0, & \ldots & y_2^{(n-1)}(x_0)=0,\\ y_3(x_0)=0, & y_3'(x_0)=0, & y_3''(x_0)=1, & \ldots & y_2^{(n-1)}(x_0)=0,\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n(x_0)=0, & y_n'(x_0)=0, & y_n''(x_0)=0, & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0)=1, \end{array}\right\} \tag{4.1.8}$$

Mostraremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una base para el espacio solución de (4.1.7).

- las $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son l.i.:
  Sean $c_1, c_2 \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ constantes tales que

  $$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0.$$

  Derivando esta ecuación $n-1$ veces, obtenemos el sistema

  $$\begin{array}{rcl} c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x) & = & 0,\\ c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+\ldots+c_ny_n'(x) & = & 0,\\ c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+\ldots+c_ny_n''(x) & = & 0,\\ \vdots & & \vdots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x)+c_2y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x) & = & 0. \end{array} \tag{4.1.9}$$

  Evaluando en x_0, resulta

  $$\begin{array}{rcl} c_1 1y_1(x_0)+c_2 0y_2(x_0)+\ldots+c_n 0y_n(x_0) & = & 0,\\ c_1 0y_1'(x_0)+c_2 1y_2'(x_0)+\ldots+c_n 0y_n'(x_0) & = & 0,\\ \ldots & & \ldots\\ c_1 0y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2 0y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_n 1y_n^{(n-1)}(x_0) & = & 0. \end{array}$$

  lo que resulta en $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\ldots$, $c_n = 0$. De ahí que las $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

- las $y_1, y_2, \ldots, y_n$ generan el espacio:
  Sea $y(x)$ una solución cualquiera de (4.1.7), y supongamos que $y(x_0) = a_1$, $y'(x_0) = a_2$, $y''(x_0) = a_3$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = a_n$. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, sabemos que $y(x)$ es la única solución del problema de valores iniciales

  $$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,\\ \text{sujeto a } y(x_0) = a_1,\ y'(x_0) = a_2,\ y''(x_0) = a_3\ \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = a_n. \end{cases}$$

Sin embargo, el sistema (4.1.9) garantiza que también la función

$$\tilde{y}(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x)$$

es solución del mismo problema. Luego, $y(x) = \tilde{y}(x) = \tilde{y}(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x)$. Esto muestra que toda solución de (4.1.7) es combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base del espacio solución. Como $\mathcal{B}$ tiene n elementos, la dimensión de este espacio es n.

Ejemplo 4.1.18. La ecuación $y'' - y = 0$ está definida en $(-\infty, \infty)$. Las funciones $y_1(x) = \cosh(x)$ y $y_2(x) = \sinh(x)$ son soluciones de esta ecuación (verifique!) tales que

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \qquad y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) &= 0 \qquad y_2'(0) = 1. \end{aligned}$$

Luego, el teorema anterior garantiza que $y_1(x), y_2(x)$ forma una base del espacio solución de $y'' - y = 0$. De ahí que la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

rem En las filas del sistema (4.1.8) no necesariamente los valores de las funciones y sus derivadas en el punto x_0 deben ser la base canónica $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0 \ldots, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, …, $\mathbf{e_n} = (0, 0, 0 \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$. El mismo argumento de independencia lineal funciona siempre que los valores de estas derivadas sean n vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. rem

Ejemplo 4.1.19. Las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ también son soluciones de la ecuación lineal $y'' - y = 0$ (verifique!). Sus derivadas son $y_1' = e^x$ y $y_2' = -e^{-x}$, y tales soluciones satisfacen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \qquad y_1'(0) = 1, \\ y_2(0) &= 1 \qquad y_2'(0) = -1. \end{aligned}$$

Como los vectores $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ y $\mathbf{v_2} = (1, -1)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ (forman una base de $\mathbb{R}^2$), entonces el teorema anterior garantiza que e^x, e^{-x} forman otra base del espacio solución de $y'' - y = 0$, distinta de la encontrada en el ejemplo 4.1.18. De ahí que la solución general de esta ecuación también puede escribirse como

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.1.20. Las funciones $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ y $y_3(x) = x^2 e^x$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ (verifique!). Tales soluciones satisfacen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_1''(0) = 1; \\ y_2(0) &= 0 \quad y_2'(0) = 1, \quad y_2''(0) = 2; \\ y_3(0) &= 0 \quad y_3'(0) = 0, \quad y_3''(0) = 2. \end{aligned}$$

Como los vectores $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ y $(0,0,2)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ (¿por qué?) el teorema anterior garantiza que e^x, xe^x y x^2e^x forma una base del espacio solución. Así, la solución general de $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ es

$$y(x) = c_0e^x + c_1xe^x + c_2x^3e^x = (c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x, \quad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Corolario 4.1.21. *Sean $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funciones definidas en (a,b), todas $n-1$ veces diferenciables. Si para algún punto $x_0 \in (a,b)$, los vectores*

$$\begin{array}{c}
\big(y_1(x_0),\ y_1'(x_0),\ y_1''(x_0),\ \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)\big),\\
\big(y_2(x_0),\ y_2'(x_0),\ y_2''(x_0),\ \dots,\ y_2^{(n-1)}(x_0)\big),\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\big(y_n(x_0),\ y_n'(x_0),\ y_n''(x_0),\ \dots,\ y_n^{(n-1)}(x_0)\big),
\end{array} \tag{4.1.10}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, entonces las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ son linealmente independientes en (a,b).

4.1.3. El wronskiano

Queremos obtener un criterio simple que nos diga cuando un conjunto de funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ definidas en cierto intervalo (a,b), son linealmente independientes en ese intervalo. Debido al teorema y al corolario anterior, una forma simple de saber si los vectores en (4.1.10) son linealmente independientes es ver si el determinante

$$\begin{vmatrix}
y_1(x_0) & y_1'(x_0) & y_1''(x_0) & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0)\\
y_2(x_0) & y_2'(x_0) & y_2''(x_0) & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
y_n(x_0) & y_n'(x_0) & y_n''(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)
\end{vmatrix} \tag{4.1.11}$$

Recuerde de sus cursos de álgebra lineal que, cuando este determinante es distinto de cero, los vectores en (4.1.10) son linealmente independientes. Esto nos conduce a la

Definición 4.1.22. Sean $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funciones definidas en el intervalo (a,b), todas $n-1$ veces diferenciables. Para cada punto $x \in (a,b)$, consideramos el determinante

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \dots & y_n(x)\\
y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & \dots & y_n'(x)\\
y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & \dots & y_n''(x)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix} \tag{4.1.12}$$

Esta es una función $W[y_1, \dots, y_n] : (a,b) \to \mathbb{R}$, llamada el *wronskiano* de $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Ejemplos 4.1.23. El wronskiano de las funciones $x, 2x$ es

$$W[x, 2x] = \begin{vmatrix} x & 2x\\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0.$$

El wronskiano de las funciones $x, \cos x, \sin x$ es

$$W[x, \cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x(\cos^2 x + \sin^2 x) - (-\cos x \sin x + \cos x \sin x) = x.$$

El wronskiano nos proporciona un criterio para la independencia lineal de funciones:

Theorema 4.1.24 (Criterio de Independencia Lineal)**.** *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funciones definidas en el intervalo (a, b), todas $n-1$ veces diferenciables. Si el wronskiano*

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.1.13}$$

no es iénticamenta la función nula en el intervalo (a, b), entonces las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes en (a, b).

Ejemplo 4.1.25. Las funciones $\cosh(x), \sinh(x)$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. En efecto, el wronskiano

$$W[\cosh(x), \sinh(x)] = \begin{vmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{vmatrix} = \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.26. Las funciones e^x, e^{-x} son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. En efecto, el wronskiano

$$W[e^x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.27. El wronskiano de las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$ es

$$\begin{aligned} W[f_1, f_2, f_3] &= \begin{vmatrix} \sqrt{x}+5 & \sqrt{x}+5x & x-1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{x}+1} & 1 \\ -\frac{1}{4x^{3/2}} & \frac{1}{4x^{3/2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{8x^2}(x-1) - \tfrac{1}{4x^{3/2}}(\sqrt{x}+5) + \left(\tfrac{1}{8x^2} + \tfrac{1}{4x^{3/2}}\right)(x-1) + \tfrac{1}{4x^{3/2}}(\sqrt{x}+5) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, el criterio no vale. Sabemos por el ejemplo (4.1.15) que las funciones f_1, f_2, f_3 son linealmente dependientes en $(0, \infty)$.

rem Si el wronskiano $W[y_1, \ldots, y_n]$ es idénticamente cero, no podemos afirmar nada respecto a la dependencia o indepedencia lineal de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$. rem

Ejemplo 4.1.28. Ya vimos en el ejemplo (4.1.16) que las funciones x^3 y $|x|^3$ son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Sin embargo, su wronskiano es

$$\text{para } x < 0: \qquad W[x^3, |x|^3] = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = -3x^5 + 3x^5 = 0.$$

$$\text{para } x > 0: \qquad W[x^3, |x|^3] = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^5 - 3x^5 = 0.$$

Los últimos dos ejemplos muestran que cuando el wronskiano de un conjunto de funciones $W[y_1, \ldots, y_n$ es nulo, puede ocurrir dependencia o independencia lineal de las funciones. Sin embargo, cuando las funciones $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal homogénea, podemos mejorar el criterio del wronskiano:

Theorema 4.1.29. *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4.1.14}$$

definida en el intervalo (a, b). Entonces, las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes en (a,b) si, y sólo si, el wronskiano

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.1.15}$$

no es iénticamenta la función nula en el intervalo (a, b).

Prueba. [$\Rightarrow$] Ya vimos esto en el teorema (4.1.24).
[$\Leftarrow$] Sea $x_0 \in (a, b)$. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + \ldots + c_ny_n(x_0) &= 0, \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + \ldots + c_ny_n'(x_0) &= 0, \\ c_1y_1''(x_0) + c_2y_2''(x_0) + \ldots + c_ny_n''(x_0) &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Como el wronskiano $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$ es idénticamente nulo, em particular $W[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)] = 0$. Luego, el determinante del sistema (4.1.16) es cero, y por lo tanto el sistema (**??** posee una solución no trivial $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n) \neq \mathbf{0}$. De ahí que la función

$$\tilde{y}(x) = \tilde{c}_1y_1(x) + \tilde{c}_2y_2(x) + \ldots + \tilde{c}_ny_n(x)$$

es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \\ \text{sujeto a } y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0,\ \ldots\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Pero, la función nula $y(x) = 0$ es también una solución de este problema. Por el Teorema de Existencia y Unicidad, tenemos que

$$\tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{c}_n y_n(x) = \tilde{y}(x) = 0,$$

lo que muestra que las $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes.

Tenemos otro criterio para estudiar la independencia lineal de funciones:

Definición 4.1.30. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funciones definidas en el intervalo (a, b), todas integrables en ese intervalo. Definimos el *producto interno* (producto punto) de la función y_i e y_j como

$$\langle y_i, y_j \rangle = y_i \cdot y_j = \int_a^b y_i(x) y_j(x)\, dx.$$

El determinante

$$\Gamma(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 \cdot y_1 & y_1 \cdot y_2 & \ldots & y_1 \cdot y_n \\ y_2 \cdot y_1 & y_2 \cdot y_2 & \ldots & y_2 \cdot y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n \cdot y_1 & y_n \cdot y_2 & \ldots & y_n \cdot y_n \end{vmatrix}$$

se llama el *determinante de Gram* de $y_1, \ldots, y_n$. Tenemos el siguiente criterio:

Theorema 4.1.31 (Criterio de Gram)**.** *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funciones definidas en el intervalo (a, b), todas integrables en ese intervalo. Si el determinante de Gram*

$$\Gamma(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 \cdot y_1 & y_1 \cdot y_2 & \ldots & y_1 \cdot y_n \\ y_2 \cdot y_1 & y_2 \cdot y_2 & \ldots & y_2 \cdot y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n \cdot y_1 & y_n \cdot y_2 & \ldots & y_n \cdot y_n \end{vmatrix}$$

no es iénticamenta la función nula en el intervalo (a, b), entonces las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes en (a, b).

Ejemplo 4.1.32. En el intervalo $(0, 1)$, las funciones x y $2x$ satisfacen

$$y_1 \cdot y_1 = \int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3}, \quad y_1 \cdot y_2 = y_2 \cdot y_1 = \int_0^1 2x^2\, dx = \tfrac{2}{3}, \quad y_2 \cdot y_2 = \int_0^1 4x^2\, dx = \tfrac{4}{3}.$$

Luego el determinante de Gram es

$$\Gamma(x, 2x) = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sin embargo, sabemos que ambas funciones son linealmente dependientes.

Ejemplo 4.1.33. En el intervalo $(-1, 1)$, las funciones $y_1(x) = x^3$ y $y_2(x) = |x|^3$ satisfacen

$$\begin{aligned}
y_1 \cdot y_1 &= \int_{-1}^{1} x^6\,dx = \tfrac{1}{7}x^7\Big|_{x=-1}^{x=1} = \tfrac{2}{7},\\
y_1 \cdot y_2 &= \int_{-1}^{1} x^3|x|^3\,dx = \int_{-1}^{0} -x^6\,dx + \int_{0}^{1} x^6\,dx = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7} = \tfrac{2}{7},\\
y_2 \cdot y_2 &= \int_{-1}^{1} |x|^6\,dx = \int_{-1}^{1} x^6\,dx = \tfrac{2}{7}.
\end{aligned}$$

Luego el determinante de Gram es

$$\Gamma(x, 2x) = \begin{vmatrix} 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 2/7 \end{vmatrix} = 0.$$

Sin embargo, ya vimos que ambas funciones son linealmente independientes en ese intervalo.

4.2. La fórmula de Abel

De acuerdo con el criterio de independencia lineal visto en la sección anterior, un conjunto de soluciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es linealmente independiente en un intervalo (a, b) si, y sólo si, su wronskiano no se anula idénticamente en ese intervalo. Veremos que este resultado puede mejorarse a través del siguiente teorema, que da una fórmula explícita para el wronskiano.

Theorema 4.2.1 (Fórmula de Abel)**.** *Sean $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

definida en el intervalo (a, b). Entonces,

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt\Big), \tag{4.2.1}$$

para todo punto $x_0 \in (a, b)$.

Prueba. Para evitar el uso de las propiedades generales de los determinantes, probaremos (4.2.1) sólo para el caso $n = 2$. La prueba general es idéntica, excepto en que usa la fórmula para la derivada de un determinante de orden n.
Suponga que $y_1(x), y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Entonces un cálculo directo da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}W[y_1(x), y_2(x)] &= \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) \\
&= y_1(x)y_2''(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2'(x) - y_1''(x)y_2(x) \\
&= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x)
\end{aligned}$$

De la ecuación diferencial original, tenemos $y'' = -a_1(x)y - a_0(x)y$. Sustituyendo este en la derivada del wronskiano, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}W[y_1(x), y_2(x)] &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\
&= -y_1(x)\big(a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\big) + \big(a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\big)y_2(x) \\
&= -a_1(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) = -a_1(x)W[y_1(x), y_2(x)]
\end{aligned}$$

Luego, el wronskiano $W = W[y_1(x), y_2(x)]$ satisface la ecuación de primer orden $\frac{dW}{dx} = -a_1(x)W$. La solución general de esta ecuación es

$$W(x) = ce^{-\int a_1(x)\, dx}. \tag{4.2.2}$$

Si $x_0 \in (a,b)$ es un punto fijo cualquiera, la solución particular que satisface la condición inicial $W(x_0) = W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ en el punto x_0 está dada por

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x)] = W[y_1(x_0), y_2(x_0)] \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt\Big),$$

que es la fórmula requerida.

La fórmula anterior muestra que el wronskiano de un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, o es distinto de cero, o es idénticamente cero. Eso da una mejora en el criterio de independencia lineal

Theorema 4.2.2 (Criterio de Independencia Lineal, mejorado)**.** *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{4.2.3}$$

definida en el intervalo (a,b). Entonces, las funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son linealmente independientes en (a,b) si, y sólo si, el wronskiano

$$W[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.2.4}$$

en algún punto $x_0 \in (a,b)$.

Ejemplo 4.2.3. El wronskiano de cualesquiera dos soluciones y_1, y_2 de la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ debe ser de la forma

$$W[y_1(x), y_2(x)] = ce^{-\int 1/x\, dx} = \tfrac{c}{x}.$$

4.3. Reducción del orden

Otra aplicación de la fórmula de Abel (4.2.1) es que usaremos esta fórmula para encontrar una segunda solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, a partir de una solución no trivial ya conocida.

Por simplicidad, trabajamos el caso de una ecuación de segundo orden.

Suponga que $y_1(x)$ es una solución ya conocida de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Vamos a construir otra solución $y_2(x)$ de esta ecuación, a partir de $y_1(x)$. Tenemos dos formas de calcular el wronskiano de las soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$. Por un lado, la definición del wronskiano, y por otro lado, la fórmula de Abel (4.2.2). Comparando ambas, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W[y_1(x), y_2(x)] &= ce^{-\int a_1(x)\, dx} \\ y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) &= \end{aligned}$$

Haciendo $c = 1$ y tomando a las y_1, y_1 como coeficientes, la ecuación anterior muestra que $y_2(x)$ es una solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden

$$y_1(x)y' - y_1'(x)y = e^{-\int a_1(x)\,dx}.$$

Resolvemos esta última ecuación diferencial:

- y_h: La ecuación homogénea asociada es $y_1(x)y' - y_1'(x)y = 0$. Separando esta ecuación, obtenemos
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\,dx = \int d\big(\log y_1(x)\big),$$
luego la solución es $y_h(x) = cy_1(x)$.

- y_p: Proponemos una solución particular de la forma $y_p(x) = u(x)y_1(x)$. Sustituyendo en la ecuación, obtenemos
$$y_1(x)\big(u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)\big) - y_1'(x)u(x)y_1(x) = y_1^2(x)u'(x) = e^{-\int a_1(x)\,dx}$$
de modo que $u' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}$. Integrando, resulta
$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx.$$
Portanto, la solución general de esta ecuación diferencial es
$$y(x) = y_1(x)\Big(c + \int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx\Big).$$

Podemos elegir $c = 0$, y obtenemos la solución particular

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx.} \tag{4.3.1}$$

Investigamos ahora la dependencia o independencia lineal de $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Calculando el wronskiando de estas dos soluciones, tenemos

$$\begin{aligned}
W[y_1(x), y_2(x)] &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx \\ y_1' & y_1'\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx + \frac{1}{y_1}e^{-\int a_1(x)\,dx} \end{vmatrix} \\
&= y_1y_1'\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx + e^{-\int a_1(x)\,dx} - y_1y_1'\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx \\
&= e^{-\int a_1(x)\,dx}.
\end{aligned}$$

Como este determinante es una exponencial[1], nunca se anula. Luego, el criterio del wronskiano implica que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ siempre son linealmente independientes. Es decir, el método de reducción del orden siempre proporciona unan segunda solución linealmente independientes a partir de una solución ya conocida.

[1]La fórmula de Abel (4.2.1) ya nos dice que el wronskiano de las soluciones de $y_1(x), y_2(x)$ debe ser $e^{-\int a_1(x)\,dx}$

Ejemplo 4.3.1. La función $y_1(x) = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$ en el intervalo (∞, ∞). Construimos una segunda solución por el método de reducción del orden. Proponemos una solución de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$. Las derivadas son $y_2' = e^x u' + e^x u$, $y'' = e^x u'' + 2e^x u' + e^x u$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\begin{aligned}
(u'' + 2u' + u)e^x - 2(u' + u)e^x + ue^x &= y'' - 2y' + y = 0 \\
(u'' + 2u' + u - 2u' - 2u + u)e^x &= 0 \\
u''e^x &= 0.
\end{aligned}$$

Como e^x nunca es cero, tenemos $u'' = 0$. Integrando dos veces, obtenemos $u(x) = c_1 + c_2 x$. Luego, la solución es $y_2(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$. Haciendo $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, una segunda solución particular es

$$y_2(x) = xe^x.$$

Observe que esta misma solución se obtiene al aplicar directamente la fórmula de reducción del orden (4.3.1). De hecho, como la ecuación diferencial es $y'' - 2y' + y = 0$, tenemos que $a_1(x) = -2$. Luego,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx \\
&= e^x \int e^{-2x} e^{\int 2\,dx}\,dx = e^x \int e^{-2x} e^{2x}\,dx = e^x \int dx = xe^x.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.2. La función $y_1(x) = x^2$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2 y'' + x^3 y' - 2(1 + x^2)y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Construimos una segunda solución por el método de reducción del orden. Proponemos una solución de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^2$. Las derivadas son $y_2' = x^2 u' + 2xu$, $y'' = x^2 u'' + 4xu' + 2u$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos

$$\begin{aligned}
x^2(x^2 u'' + 4xu' + 2u) + x^3(x^2 u' + 2xu) - 2(1 + x^2)ux^2 &= x^2 y'' + x^3 y' - 2(1 + x^2)y = 0 \\
x^4 u'' + 4x^3 u' + 2x^2 u + x^5 u' + 2x^4 u - 2x^2 u - 2x^4 u &= 0 \\
x^3(xu'' + (4 + x^2)u') &= 0.
\end{aligned}$$

Haciendo $v = u'$, tenemos $v' = u''$. Luego la última ecuación es $xv' + (4 + x^2)v = 0$, una ecuación separable. Resolviendo, obtenemos

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{4 + x^2}{x}\,dx = -\int \left(\frac{4}{x} + x\right) dx = -4\log x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tilde{c}.$$

De ahí que la solución es $v(x) = c_1 x^{-4} e^{-\frac{1}{2}x}$, e integrando $u(x) = c_1 \int x^{-4} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx + c_2$. Haciendo $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, obtenemos una segunda solución particular

$$y_2(x) = u(x)x^2 = x^2 \int x^{-4} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx.$$

Observe que esta misma solución se obtiene al aplicar directamente la fórmula de reducción del orden (4.3.1). Como la ecuación diferencial escrita en forma normal es $y'' + xy' - 2(x^{-2} + 1)y = 0$, tenemos que $a_1(x) = x$. Luego,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx \\ &= x^2 \int x^{-4} e^{-\int x\,dx}\,dx = x^2 \int x^{-4} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Observación 4.3.3. Usualmente el método de reducción de orden funciona de manera simple cuando queremos resolver una ecuación de segundo orden. Es decir, si conocemos una solución particular $y_1(x)$ de una ecuación de segundo orden, podemos construir una segunda solución $y_2(x)$ a partir de y_1.

Este mismo método puede replicarse para construir una solución particular de ecuaciones de orden superior, cuando se conocen previamente otras soluciones. Por ejemplo, si conocemos dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$ de una ecuación de orden 3, podemos construir una tercera solución particular $y_3(x)$, a partir de y_1 y y_2. El método se hace de la misma forma, y en este caso nos conduce a resolver una ecuación de orden 2.

En general, si conocemos $n-1$ soluciones linealmente independientes de una ecuación de orden n, podemos construir una nueva solución y_n independiente de las anteriores. En este caso, el método de reducción de orden nos conduce a resolver una ecuación de grado $n-1$, de ahí el nombre del método.

Ejemplo 4.3.4. Las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = xe^x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ (verifique!). Usamos el método de reducción de orden para hallar una tercera solución de esta ecuación. De la definición del wronskiano y la fórmula de Abel, tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = W[y_1(x), y_2(x), y_3(x)] &= e^{-\int a_2(x)\,dx} \\ \begin{vmatrix} e^x & xe^x & y_3 \\ e^x & xe^x + e^x & y_3' \\ e^x & xe^x + 2e^x & y_3'' \end{vmatrix} &= e^{\int 3\,dx} = e^{3x} \\ e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x & y_3 \\ 1 & x+1 & y_3' \\ 1 & x+2 & y_3'' \end{vmatrix} &= e^{\int 3\,dx} = e^{3x} \\ e^{2x}(y_3'' - 2y_3' + y_3) &= e^{3x}. \end{aligned}$$

El determinante anterior indica que $y_3(x)$ debe ser una solución de la ecuación diferencial de orden 2:

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Aún no hemos aprendido cómo resolver este tipo de ecuaciones (así que no se preocupe si no consigue resolverla). La solución general de esta última ecuación es $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$. Eligiendo $c_1 = c_2 = 0$, obtenemos la solución particular $y_3(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$.

El lector puede verificar que esta última solución es linealmente independiente con $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = xe^x$.

4.4. La notación de operador

En esta sección, iniciamos los métodos para resolver ecuaciones lineales. Comenzamos con el caso más simple, cuando la ecuación lineal es homogénea y los coeficientes son funciones constantes. Previo a mostrar como funciona este método, hacemos una pequeña revisión sobre la notación de operador.
Recordemos que dada una ecuación diferencial, podemos reescribirla usando la notación de operador. Esto es,

$$y' = Dy, \quad y'' = D(Dy) = D^2y, \quad y''' = D(D^2y) = D^3y, \quad \dots \quad y^{(n)} = D^ny.$$

Así, la ecuación lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

puede reescribirse como

$$\begin{aligned} D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \dots + a_2(x)D^2y + a_1(x)Dy + a_0(x)y &= f(x) \\ (D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0)y &= f(x). \end{aligned}$$

Esta notación tiene la ventaja que puede algebrizarse. Es decir, podemos tratar los diferenciales D^k como si se tratase de un polinomio en la variable D. Así, la ecuación anterior se ecribe como $Ly = f(x)$, donde el polinomio

$$L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0$$

es un operador diferencial.

Un operador diferencial lineal es el equivalente a las transformaciones lineales que usted ha visto en los cursos de àlgebra lineal. La diferencial es que en lugar de actuar sobre vectores de $\mathbb{R}^n$, actúa sobre funciones diferenciables en algún intervalo.

Definición 4.4.1. Sea (a, b) un intervalo, y considere $C^n(a, b)$ el espacio de funciones n veces diferenciables en (a, b). Un *operador diferencial lineal* L es una transformación lineal $L : C^n(a, b) \to C^n(a, b)$.

Así, el operador $L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0$ es el mapa que manda

$$y \rightsquigarrow y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y.$$

Un buen ejercicio para el lecto es verificar que todo polinomio de la forma

$$L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0$$

define un operador diferencial lineal. Mostramos el caso de un polinomio de grado 2:

Ejemplo 4.4.2. El polinomio $L = a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)$ define un operador diferencial lineal en $C^2(a, b)$. De hecho, si y es una función dos veces diferenciable en (a, b), tenemos que

$$\begin{aligned} Ly &= \big(a_2(x)D^2 + a_1(x)D + a_0(x)\big)y = \big(a_2(x)D^2y + a_1(x)Dy + a_0(x)\big)y \\ &= a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y. \end{aligned}$$

Mostramos ahora que L es un operador lineal. Si $y_1, y_2 \in C^2(a,b)$, para cualesquiera constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} L(c_1y_1 + c_2y_2) &= a_2(x)(c_1y_2 + c_2y_2)'' + a_1(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= a_2(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + c_2(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) \\ &= c_1Ly_1 + c_2Ly_2 \end{aligned}$$

Luego, L es una transformación lineal en $C^2(a,b)$

4.5. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Tratamos el caso de ecuaciones lineales en los que los coeficientes $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son todos constantes. Es decir $a_0(x) = a_0$, $a_1(x) = a_1$, ..., $a_n(x) = a_n$, con los $a_i \in \mathbb{R}$.

Recordemos el caso de una ecuación de primer orden. La ecuación

$$y' + a_0y = 0 \tag{4.5.1}$$

es separable. Separando las variables, obtenemos $dy = -a_0\,dx$, de modo que $\log(y) = -a_0(x) + \tilde{c}$. Al quitar el logaritmo, obtenemos la solución general

$$y(x) = ce^{-a_0x}$$

En la notación de operador, la ecuación (4.5.1) se escribe como

$$Ly = (D + a_0)y = 0, \tag{4.5.2}$$

donde $L = D + a_0$ es un operador diferencial lineal de orden 1. Como ya sabemos que la solución debe ser una exponencial, una alternativa al método de separación de variables es proponer una solución con la forma deseada. Veamos que acontece si proponemos una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$:
Como $y = e^{mx}$, su derivada es $y' = me^{mx}$, luego

$$y' + a_0y = me^{mx} + a_0e^{mx} = (m + a_0)e^{mx} = 0.$$

Como una exponencial nunca se anula, se sigue que $m + a_0 = 0$, y portanto $m = -a_0$. Luego, la solución básica debe ser de la forma $y(x) = e^{-a_0x}$. De la teoría de ecuaciones lineales, la solución general debe ser el espacio vectorial generado por esta solución básica:

$$y(x) = ce^{-a_0x}$$

lo que coincide con la solución obtenido por separación de variables.

Observe que con este método obtuvimos el polinomio $(m + a_0)$, cuya raíz es $m = -a_0$. Este polinomio obtenido no es casualidad, sino que es exactamente el polinomio correspondiente al operador $L = D + a_0$.

Definición 4.5.1. Sea $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_2D^2 + a_1D + a_0$ un operador diferencial con coeficientes constantes. El polinomio

$$p_L(m) = m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1m + a_0$$

es llamado el *polinomio característico*, (o *polinomio asociado*) a la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0.$$

Imitamos ahora este método de solución para el caso de unaa ecuación de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0.$$

Proponemos una solución básica de la forma $y = e^{mx}$. Las derivadas son $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$, $y''' = m^3e^{mx}$, ..., $y^{(n)} = m^ne^{mx}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1(x)y' + a_0y &= 0 \\ m^ne^{mx} + a_{n-1}m^{n-1}e^{mx} + \ldots + a_2m^2e^{mx} + a_1(x)me^{mx} + a_0e^{mx} &= \\ (m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_2m^2 + a_1(x) + a_0)e^{mx} &= \\ p_L(m)e^{mx} &= \end{aligned}$$

De nuevo, la exponencial nunca es zero, de modo que $p_L(m) = 0$, y los posibles valores de m que cumplen la ecuación diferencial, son las raíces del polinomio característico.

El método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes se basa en la observación anterior. Proponemos de nuevos una solución básica de la forma $y = e^{mx}$. Al sustituirla en la ecuación diferencial obtenemos un polinomio en la variable m (el polinomio característico), cuyas raíces nos proporcionan los valores adecuados de m que cumplen la ecuación diferencial.

Ejemplo 4.5.2. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 5y' + 6y = 0$.
En notación de operador, la ecuación se reescribe como $(D^2 + 5D + 6)y = 0$, luego el polinomio característico de esta ecuación es $m^2 + 5m + 6 = (m + 2)(m + 3) = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = -2$ y $m = -3$. Así, tenemos dos soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$

Portanto, la solución general debe ser el espacio generado por las soluciones básicas, esto es

$$\boxed{y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Este método de solución se subdivide en varios casos, atendiendo al tipo de raíces del polinomio característico:

4.5.1. Raíces reales distintas

Cuando todas las raíces de polinomio característico son números reales distintos, digamos $m_1 < m_2 < \ldots m_n$, podemos asegurar que las n soluciones básicas $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$, ..., $y_n = e^{m_n x}$ son linealmente independientes, de modo que éstas generan siempre la solución general.

Por ejemplo, para el caso $n = 2$, tenemos raíces reales $m_1 < m_2$. El wronskiano de las soluciones básicas $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$ es

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} e^{m_1 x} e^{m_2 x} \\ &= (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)x} \neq 0, \end{aligned}$$

el cual nunca se anula, pues $m_1 \neq m_2$.

En el caso $n = 3$, tenemos raíces reales $m_1 < m_2 < m_3$. El wronskiano de las soluciones básicas $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$ y $y_3(x) = e^{m_3 x}$ es

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, y_3] &= \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} & e^{m_3 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} & m_3 e^{m_3 x} \\ m_1^2 e^{m_1 x} & m_2^2 e^{m_2 x} & m_3^2 e^{m_3 x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix} e^{m_1 x} e^{m_2 x} e^{m_3 x} \\ &= (m_1 m_2^2 + m_2 m_3^2 + m_3 m_1^2 - m_1^2 m_2 - m_2^2 m_3 - m_3^2 m_1) e^{(m_1 + m_2 + m_3)x} \\ &= (m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_3 - m_1) e^{(m_1 + m_2 + m_3)x} \neq 0, \end{aligned}$$

el cual nunca se anula, pues $m_1 < m_2 < m_3$.

En general, para una ecuación de orden n, con raíces distintas $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, el wronskiano de las soluciones básicas $y_1 = e^{m_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{m_n x}$ es

$$\begin{aligned} W[y_1, \ldots, y_n] &= \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} & \ldots & e^{m_n x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} & \ldots & m_n e^{m_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{n-1} e^{m_1 x} & m_2^{n-1} e^{m_2 x} & \ldots & m_n^{n-1} e^{m_n x} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{m_1 x} e^{m_2 x} \cdots e^{m_n x} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (m_j - m_i) e^{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)x} \neq 0. \end{aligned}$$

este último determinante se conoce como *determinante de Vandermonde.*

Ejemplo 4.5.3. Hallar la solución general de $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.
En notación de operador, la ecuación se reescribe como $(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0$, luego el

polinomio característico de esta ecuación es $m^3 - 2m^2 - 3m = m(m+1)(m-3) = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = 0$, $m = -1$ y $m = 3$. Así, tenemos tres soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad \text{y} \quad y_3(x) = e^{3x}.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 4.5.4. Hallar la solución general de $16y^{(iv)} - 14y''' - 21y'' + y' + 3y = 0$.
En notación de operador, la ecuación se reescribe como $(16D^4 - 14D^3 - 21D^2 + D + 3)y = 0$, luego el polinomio característico de esta ecuación es $16m^4 - 14m^3 - 21m^2 + m + 3 = 0$. Haciendo división sintética, encontramos que las raíces de esta ecuación son $m = \frac{3}{8}$, $m = -\frac{1}{2}$ y $m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Así, tenemos cuatro soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}, \quad y_2(x) = e^{\frac{3}{8}x}, \quad y_3(x) = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}, \quad \text{y} \quad y_4(x) = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{\frac{3}{8}x} + c_3 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_4 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.}$$

Comentario. Para hallar las raíces de un polinomos, podemos usar muchos métodos: factorización, fórmula cuadrática, cubica o cuártica, división sintética, métodos numéricos (*e. g.* Newton).

4.5.2. Raíces reales repetidas

Supongamos que al resolver el polinomio característico de una ecuación lineal con coeficientes constantes, obtenemos alguna raíz repetida, es decir, una raíz con multiplicidad $k > 1$. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'' - 2ay' + a^2 = 0, \quad \text{con } a \in \mathbb{R},$$

posee el polinomio característico $m^2 - 2am + a^2 = (m-a)^2 = 0$, cuyas raíces son $m = a$ y $m = a$. Si construimos las soluciones básicas dadas por estas raíces, tenemos un problema:

$$y_1(x) = e^{ax}, \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{ax}.$$

Observe que la segunda solución básica y_2 coincide con y_1. Luego, ambas soluciones básicas no son linealmente independientes. Esto produce un problema a la hora de proponer la solución general como

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = ce^{ax},$$

puesto que obtenemos una familia 1-paramétrica de soluciones, mientras que la teoría de las ecuaciones lineales nos dices que deberiamos esperar una familia 2-paramétrica.

Entonces, ¿cómo podemos obtener una segunda solución básica, $y_2(x)$ que sea linealmente independiente de la solución básica $y_1(x) = e^{ax}$? ¿es posible?, ¿cómo la construimos?. Para el caso de multiplicidad 2, en la ecuación anterior, podemos usar varios métodos:

- Reducción del orden: Recordemos que en la sección anterior vimos como la fórmula de Abel proporciona un método para construir una segunda solución linealmente independiente, a partir de una solución ya conocida. Podemos usar la fórmula de reducción de orden $y_1(x) = e^{ax}$ para construir una segunda, que sea linealmente independiente: (en este caso $a_1(x) = -2a$)

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)\, dx}\, dx \\ &= e^{ax} \int \frac{1}{e^{2ax}} e^{\int 2a\, dx}\, dx = e^{ax} \int e^{-2ax} e^{2ax}\, dx = e^{ax} \int dx \\ &= xe^{ax}. \end{aligned}$$

  El método de reducción del orden garantiza que $y_1(x) = e^{ax}$ y $y_2(x) = xe^{ax}$ son l.i.

- Variación de parámetros: Proponemos una segunda solución de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x) = ue^{ax}$. Las derivadas son $y_2' = u'e^{ax} + uae^{ax}$, $y_2'' = u''e^{ax} + 2au'e^{ax} + ua^2e^{ax}$. Luego, al sustituir en la ecuación original, tenemos

$$\begin{aligned} y_2'' - 2ay_2' + a^2y_2 &= (u'' + 2au' + a^2u)e^{ax} - 2a(u' + au)e^{ax} + a^2ue^{ax} \\ &= (u'' + 2au' + a^2u - 2au' - 2a^2u + a^2u)e^{ax} = u''e^{ax} = 0. \end{aligned}$$

  Como la exponencial nunca se anula, debemos tener $u'' = 0$, luego $u(x) = c_1 + c_2x$. Se sigue que $y_2(x) = ue^{ax} = (c_1 + c_2x)e^{ax} = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$. Podemmos hacer $c_1 = 0$ (pues este término ya está contenido en la solución básica $y_1(x)$), y $c_2 = 1$. Así, obtenemos una segunda solución básica $y_2(x) = xe^{ax}$.

En cualquier caso, la solución general de la ecuación tiene la forma $y(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$.

Para el caso de multiplicidad 3, repetimos estos métodos. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3 = 0, \quad \text{con } a \in \mathbb{R},$$

posee el polinomio característico $m^3 - 3am^2 + 3a^2m - a^3 = (m - a)^3 = 0$, cuyas raíces son $m = a$, $m = a$ y $m = a$, una raíz de multiplicidad 3. Construimos una segunda solución a partir de $y_1(x) = e^{ax}$

- Variación de parámetros: Proponemos una segunda solución de la forma $y_2(x) = u(x)y_1(x) = ue^{ax}$. Las derivadas son $y_2' = u'e^{ax} + uae^{ax}$, $y_2'' = u''e^{ax} + 2au'e^{ax} + ua^2e^{ax}$ y $y_2''' = u'''e^{ax} + 3au''e^{ax} + 2a^2u'e^{ax} + a^3ue^{ax}$. Luego, al sustituir en la ecuación original, tenemos

$$\begin{aligned} (u''' + 3au'' + 3a^2u' + a^3u)e^{ax} - 3a(u'' + 2au' + a^2u)e^{ax} + 3a^2(u' + au)e^{ax} - a^3ue^{ax} &= \\ (u''' + 3au'' + 3a^2u' + a^3u - 3au'' - 6a^2u' - 3a^3u + 3a^2u' + 3a^3u - a^3u)e^{ax} &= \\ u'''e^{ax} &= 0. \end{aligned}$$

  Como la exponencial nunca se anula, debemos tener $u''' = 0$, luego $u(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$. Se sigue que $y_2(x) = ue^{ax} = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{ax} = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + c_3x^2e^{ax}$. Podemmos hacer $c_1 = 0$ (pues este término ya está contenido en la solución básica $y_1(x)$), $c_2 = 0$ (pues este término ya está contenido en la solución básica $y_2(x) = xe^{ax}$), y $c_3 = 1$. Así, obtenemos una tercera solución básica $y_3(x) = x^2e^{ax}$.

Luego, la solución general de la ecuación tiene la forma $y(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + c_3x^2e^{ax}$.

En el caso general, si el polinomio característico posee una raíz m de multiplicidad k, obtenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{mx}, \quad y_2(x) = xe^{mx}, \quad y_3(x) = x^2e^{mx}, \quad \ldots, \quad y_k(x) = x^{k-1}e^{mx}.$$

Ejemplo 4.5.5. Hallar la solución general de $y'' + 4y' + 4y = 0$.
En notación de operador, la ecuación se reescribe como $(D^2 + 4D + 4)y = 0$, luego el polinomio característico de esta ecuación es $m^2 + 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = 2$, con multiplicidad 2. Así, tenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = xe^{2x}.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 4.5.6. Hallar la solución general de $y''' + 3y'' - 9y' - 27y = 0$.
En notación de operador, la ecuación se reescribe como $(D^3 + 3D^2 - 9D - 27)y = 0$, luego el polinomio característico de esta ecuación es $m^3 + 3m^2 - 9m - 27 = (m^2 - 9)(m + 3) = (m - 3)(m + 3)^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = 3$, y $m = -3$ con multiplicidad 2. Tenemos tres soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-3x}, \quad \text{y} \quad y_3(x) = xe^{-3x}.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + c_3xe^{-3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 4.5.7. Hallar la solución general de $y^{(vi)} + 2y^{(v)} + y^{(iv)} = 0$.
En notación de operadores, la ecuación es $(D^6 + 2D^5 + D^4)y = 0$, luego el polinomio característico es $m^6 + 2m^5 + m^4 = m^4(m + 1)^2 = (m - 3)(m + 3)^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = 0$ con multiplicidad 4, y $m = -2$ con multiplicidad 2. Tenemos seis soluciones básicas

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \quad y_4(x) = x^3, \quad y_5(x) = e^{-x}, \quad \text{y} \quad y_6(x) = xe^{-x}.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^{-x} + c_6e^{-x}.}$$

4.5.3. Raíces complejas

Recordemos que en el plano $\mathbb{R}^2$, podemos reescribir las coordenadas de un punto $\mathbf{p} = (x, y)$ en forma polar $\mathbf{p} = (r, \theta)$, donde

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

En el caso de un número complejo $z = x + iy$, podemos reescribir la forma polar como

$$z = x + iy = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta).$$

Desarrollamos ahora una forma más compacta para escribir última representación de z. Esta notación se conoce como la *forma polar* de un número complejo.

Theorema 4.5.8 (Identidad de Euler)**.** *Para cualquier número complejo $z \in \mathbb{C}$, vale*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{4.5.3}$$

Prueba. Vamos a probar la identidad de Euler usando una versión del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, para ecuaciones diferenciales complejas[2]. Sea $z \in \mathbb{C}$ una variable compleja. Considere la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dz} - iy = 0, \quad y(0) = 1. \tag{4.5.4}$$

Esta es una ecuación separable, cuya solución general es $y(z) = ce^{iz}$. Valuando la condición inicial $y(0) = 1$, obtenemos que $c = 1$, luego la solución particular es $y(z) = e^{iz}$. Por otro lado, la función

$$\tilde{y}(z) = \cos z + i\sin z$$

es tal que $\tilde{y}'(z) = -\sin z + i\cos z$. Luego

$$\tilde{y}' - i\tilde{y} = (-\sin z + i\cos z) - i(\cos z + \sin z) = (-\sin z + \sin z) + i(\cos z - \cos z) = 0,$$

y $\tilde{y}(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$. Así, $\tilde{y}$ es también solución de la ecuación (4.5.4). Por el Teorema de existencia y unicidad, el problema de valores iniciales (4.5.4) posee solución única. Portanto $y(z) = \tilde{y}(z)$, y obtenemos

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Como consecuencia de la fórmula de Euler, tenemos

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i\sin x, && \text{para todo número real } x,\\
e^{-ix} &= \cos x - i\sin x, && \text{para todo número real } x\\
e^{ibx} &= \cos bx + i\sin bx, && \text{para cualesquiera números reales } b, x\\
e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} &= e^{ax}(\cos bx + i\sin bx), && \text{para números reales } a, b, x.
\end{aligned}$$

Recordemos que para un polinomio con coeficientes reales, las raíces compkejas siempre aparecen en pares de la forma $a \pm bi$. Si $a \pm bi$, con $b \neq 0$, es un par de raíces complejas del polinomio característico de una ecuación diferencial, entonces la identidad de Euler nos dice que obtenemos las soluciones básicas

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx), \quad \tilde{y}_2(x) = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

[2]El teorema de Picard tiene un análogo para ecuaciones diferenciales de primer orden en el plano complejo $\mathbb{C}$. Una forma alternativa de probar la identidad de Euler es usando series de potencias. Para ello, véase cualquier texto de ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, estas dos soluciones son funciones complejas. Nosotros estamos interesados en hallar soluciones reales. Para ello, consideramos las combinaciones lineales:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \tfrac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = \tfrac{1}{2}(e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)) \\
&= e^{ax}\cos bx, \\
y_2(x) &= \tfrac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = \tfrac{1}{2i}(e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) - e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)) \\
&= e^{ax}\sin bx,
\end{aligned}$$

Estas dos últimas son soluciones reales de la ecuación diferencial. Mas todavía, su wronskiano es

$$\begin{aligned}
W[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{vmatrix} \\
&= e^{ax}(a\cos bx\sin bx + b\cos^2 bx - a\cos bx\sin bx + b\sin^2 bx) \\
&= be^{ax} \neq 0,
\end{aligned}$$

lo que muestra que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 4.5.9. Hallar la solución general de $y'' + y = 0$.
La ecuación se reescribe como $(D^2 + 1)y = 0$, luego el polinomio característico de esta ecuación es $m^2 + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = \pm i$, y tenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Ejemplo 4.5.10. Hallar la solución general de $y'' + y' + y = 0$.
En notación de operador, la ecuación es $(D^2 + D + 1)y = 0$, luego el polinomio característico es $m^2 + m + 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$.
Así, tenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}x.}$$

4.5.4. Raíces complejas repetidas

Al igual que en el caso de la raíces reales repetidas, podemos usar el método de reducción de orden para generar una segunda solución linealmente independiente a partir de una solución conocida. Si $a \pm bi$ es un par de raíces complejas del polinomio caraterístico, con multiplicidad k, obtenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax}\cos bx, \quad y_3(x) = xe^{ax}\cos bx, \quad y_4(x) = xe^{ax}\sin bx,$$
$$\ldots, \quad y_{2k-1}(x) = x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \quad y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

Ejemplo 4.5.11. Hallar la solución general de $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$.
En notación de operador, la ecuación es $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$, luego el polinomio característico es $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $m = \pm i$, con multiplicidad 2. Así, tenemos las soluciones básicas

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad y_3(x) = x \cos x, \quad y_4(x) = x \sin x$$

Portanto, la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x.}$$

4.6. Método de los coeficientes indeterminados (superposición)

En esta sección estudiamos un método para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes no homogéneas

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Veremos que esta técnica funciona para un conjunto muy restricto de funciones $f(x)$, pero que facilita bastante la solución en estos casos. Iniciamos con un principio general.

Proposición 4.6.1 (Principio de Superposición para ecuaciones no homogéneas)**.** *Suponga que $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ son soluciones particulares en el intervalo (a, b), respectivamente, de las ecuaciones lineales*

$$\begin{array}{rcl} a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y & = & f_1(x), \\ a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y & = & f_2(x), \\ \vdots & = & \vdots, \\ a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y & = & f_k(x), \end{array} \tag{4.6.1}$$

en el sentido que $y_i(x)$ es solución de la i-ésima ecuación en esta lista. Entonces, la función $y_p : (a, b) \to \mathbb{R}$ dada por

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_k(x)$$

es solución de la ecuación lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + \ldots + f_k(x). \tag{4.6.2}$$

Prueba. Como $y_i(x)$ es solución de la i-ésima ecuación en (4.6.1), entonces

$$a_n(x)y_i^{(n)} + \ldots + a_2(x)y_i'' + a_1(x)y_i' + a_0(x)y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2 \ldots, k.$$

Luego, como los operadores diferenciales D^n son lineales, la función $y(x) = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ es tal que

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \quad =$$

$$\begin{array}{rl} = & a_n(y_1 + \ldots + y_k)^{(n)} + \ldots + a_2(y_1 + \ldots + y_k)'' + a_1(y_1 + \ldots + y_k)' + a_0(y_1 + \ldots + y_k) \\ = & (a_n(x)y_1^{(n)} + \ldots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + \ldots + (a_n(x)y_k^{(n)} + \ldots + a_1(x)y_k' + a_0(x)y_k) \\ = & f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x). \end{array}$$

El método de coeficientes indeterminados, consiste en proponer una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma adecuada, dependiendo de la función $f(x)$ que aparece en el lado derecho de la ecuación diferencial lineal.
El método se aplica cuando:

- los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes,
- la función $f(x)$ es alguno de los siguientes tipos:
    - funciones constantes $f(x) = b$,
    - funciones polinomiales $f(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$,
    - funciones exponenciales $f(x) = be^{ax}$,
    - funciones trigonométricas de la forma $f(x) = a\cos bx$ ó $f(x) = a\sin bx$,
    - cualquier suma o producto de un número finito de las anteriores.

Para cada una de las funciones, ahora en lugar de proponer una solución particular y_p acorde a $f(x)$, el método consiste en hallar un operador anulador adecuado. Luego, las constantes de la solución particular adecuada se hallan de la misma forma que en el método de los coeficientes indeterminados.

Función $f(x)$	Solución particular y_p propuesta
c	A.
cx	$A_1x + A_0$.
cx^2	$A_2x^2 + A_1x + A_0$.
$\vdots$	$\vdots$
cx^n	$A_nx^n + \ldots + A_1x + A_0$
ce^{ax}	Ae^{ax}
$c\cos bx$	$A_1\cos bx + A_2\sin bx$
$c\sin bx$	$A_1\cos bx + A_2\sin bx$
cx^ne^{ax}	$(A_nx^n + \ldots + A_1x + A_0)e^{ax}$
$cx^n\cos bx$	$(A_nx^n + \ldots + A_1x + A_0)(B_1\cos bx + B_2\sin bx)$
$cx^n\sin bx$	$(A_nx^n + \ldots + A_1x + A_0)(B_1\cos bx + B_2\sin bx)$
$ce^{ax}\cos bx$	$A_1e^{ax}\cos(bx) + A_2e^{ax}\sin bx$
$ce^{ax}\sin bx$	$A_1e^{ax}\cos(bx) + A_2e^{ax}\sin bx$
$cx^ne^{ax}\cos bx$	$(A_nx^n + \ldots + A_0)(C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx)$
$cx^ne^{ax}\sin bx$	$(A_nx^n + \ldots + A_0)(C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx)$

Además, debemos tener en mente la siguiente **Regla de independencia lineal**: Cada término de la solución particular propuesta y_p debe ser independiente de los términos de la solución homogénea asociada. Si esto no ocurre, es decir, si un término $\square$ no es independiente, éste se modifica. Para ello, tal término $\square$ se multiplica por alguna potencia de x: $\square x, \square x^2, \square x^3, \ldots$ hasta hallar un término que sea independiente de la solución homogénea asociada.

Ejemplo 4.6.2. Resolver la ecuación $y'' - 5y' + 4y = 3x + 1$.
La ecuación es lineal con coeficientes constantes. Como la ecuación es no homogénea, resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' - 5y' + 4y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 - 5D + 4 = (D-4)(D-1) = 0$. Las raíces son $m = 1$ y $m = 4$, de modo que la solución de la homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p: Hallamos ahora la solución particular y_p. Como la función del lado derecho de la ecuación diferencial es un polinomio de grado 1, proponemos una solución de forma polinomial

$$y_p = Ax + B.$$

Las derivadas de esta función son $y_p' = A$, $y_p'' = 0$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$3x + 1 = y_p'' - 5y_p' + 4 = 0 - 5(A) + 4(Ax + B) = 4Ax + (4B - 5A).$$

Luego, $4A = 3$ y $4B - 5A = 1$, y tenemos que $A = \frac{3}{4}$ y $B = \frac{1+5A}{4} = \frac{19}{16}$. Portanto, la solución particular es

$$y_p = \tfrac{3}{4}x + \tfrac{19}{16}.$$

De ahí que la solución general es $\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{19}{16}.}$

Ejemplo 4.6.3. Hallar la solución general de la ecuación $y''' - y'' + y' - y' = x^2 + x$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y''' - y'' + y' - y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^3 - D^2 + D - 1 = (D-1)(D^2+1) = 0$. Las raíces son $m = 1$ y $m = \pm i$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. Observe que la función del lado derecho de la ecuación diferencial es un polinomio de grado 2. Esto sugiere que debemos proponer una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Las derivadas de esta función son $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$, $y_p''' = 0$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$x^2+x = y_p'''-y_p''+y_p'-y_p = 0-2A+(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C) = -Ax^2+(2A-B)x+(B-2A-C).$$

De ahí que $A = -1$, $2A - B = 1$ y $B - 2A - C = 0$. Luego, $B = 2A - 1 = -3$ y $C = B - 2A = -1$. Portanto, la solución particular es

$$y_p = x^2 - 3x - 1,$$

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + x^2 - 3x - 1.}$

Ejemplo 4.6.4. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y' - 2y = 4e^{2x}$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 + 4D - 2 = 0$. Las raíces de este polinomio son $m = \frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. La función del lado derecho de la ecuación diferencial es una exponencial e^{2x}. Proponemos una solución particular de la forma $y_p = Ae^{2x}$.
  Las derivadas de esta función son $y_p' = 2Ae^{2x}$, $y_p'' = 4Ae^{2x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$4e^{2x} = y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 4Ae^{2x} + 4(2Ae^{2x}) - 2(Ae^{2x}) = 10Ae^{2x}.$$

  De ahí que $10A = 4$, o sea $A = \frac{2}{5}$. Portanto, la solución particular es $y_p = \frac{2}{5}e^{2x}$,

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x} + \frac{2}{5}e^{2x}.}$

Ejemplo 4.6.5. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 6 \sin 3x$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' + 4y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 + 4D + 4 = (D + 2)^2 = 0$. Las raíces de este polinomio son $m = -2$, con multiplicidad 2; luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. La función del lado derecho de la ecuación diferencial es una trigonométrica. Proponemos una solución particular de la forma $y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$.
  Las derivadas de esta función son $y_p' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$ y $y_p'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\begin{aligned} 6\sin 3x &= y_p'' + 4y_p' + 4y_p = (-9A\cos 3x - 9B\sin 3x) + 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 4(A\cos 3x \\ &= (-5A + 12B)\cos 3x + (-12A - 5B)\sin 3x. \end{aligned}$$

  De ahí que $-5A + 12B = 0$ y $-12A - 5B = 6$, o sea que $A = -\frac{72}{169}$ y $B = -\frac{30}{169}$.
  Portanto, la solución particular es $y_p = -\frac{72}{169}\cos 3x - \frac{30}{169}\sin 3x$,

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x} - \frac{72}{169}\cos 3x - \frac{30}{169}\sin 3x.}$

Ejemplo 4.6.6 (Usando el principio de superposición)**.** Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 2y = e^{3x} + \frac{1}{2}x - 3 + 5\cos x$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 2y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 + 2 = 0$. Las raíces de este polinomio son $m = \pm\sqrt{2}i$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. La función del lado derecho es $e^{3x} + \frac{1}{2}x - 3 + 5\cos x$. Esta función tiene un término exponencial, una parte polinomial, y el último término es una función trigonométrica. En lugar de proponer una solución particular que satisfaga estas tres características, podemos partir la ecuación anterior en tres ecuaciones màs simples:

$$\begin{aligned} y'' + 2y &= e^{3x}, \\ y'' + 2y &= \tfrac{1}{2}x - 3, \\ y'' + 2y &= 5\cos x. \end{aligned}$$

  Construimos tres soluciones particulares y_{p1}, y_{p2} y y_{p3} (una para cada una de las ecuaciones anteriores). Por el Principio de Superposición 4.6.1, la solución particular de la ecuación original es la suma de las tres anteriores. Así, $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$.
  Resolvemos y_{p1}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = e^{3x}$, proponemos la solución particular $y_{p1} = Ae^{3x}$. Sus derivadas son $y_{p1}' = 3Ae^{3x}$, $y_{p1}'' = 9Ae^{3x}$. Luego, $e^{3x} = y_{p1}'' + 2y_{p1} = 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = 11Ae^{3x}$, y obtenemos $A = \frac{1}{11}$. Así,

$$y_{p1} = \tfrac{1}{11}e^{3x}.$$

Resolvemos y_{p2}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = \frac{1}{2}x - 3$, proponemos la solución particular $y_{p2} = Ax + B$. Sus derivadas son $y'_{p2} = A$, $y''_{p2} = 0$. Luego, $\frac{1}{2}x - 3 = y''_{p2} + 2y_{p2} = 0 + 2(Ax + B) = 2Ax + 2B$, y obtenemos $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{2}$. Así,

$$y_{p2} = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}.$$

Resolvemos y_{p3}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = 5\cos x$, proponemos la solución particular $y_{p3} = A\cos x + B\sin x$. Sus derivadas son $y'_{p3} = -A\sin x + B\cos x$, $y''_{p3} = -A\cos x - B\sin x$. Luego, $5\cos x = y''_{p3} + 2y_{p3} = -A\cos x - B\sin x + 2(A\cos x + B\sin x) = A\cos x + B\sin x$. De ahí que $A = 0$, $B = 5$. Así,

$$y_{p3} = 5\sin x.$$

Por el principio de superposición, la solución particular debe ser $y_p = \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + 5\sin x$,

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x + \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + 5\sin x.}$

Ejemplo 4.6.7 (Una falla imprevista?)**.** Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 3y' - 10y = 8e^{5x}$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' - 10y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 - 3D - 10 = (D-5)(D+2) = 0$. Las raíces son $m = 5$ y $m = -2$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. La función del lado derecho es una exponencial. Proponemos una solución particular de forma

$$y_p = Ae^{5x}.$$

Las derivadas de esta función son $y'_p = 5Ae^{5x}$, $y''_p = 25Ae^{5x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$8e^{5x} = y''_p - 3y'_p - 10y_p = 25Ae^{5x} - 3(5Ae^{5x}) - 10Ae^{5x} = 25Ae^{5x} - 25Ae^{5x} = 0,$$

que es una contradicción, la exponencial $8e^{5x}$ nunca se anula.

¿Qué es lo que está errado?

Observación 4.6.8. Note que en el ejemplo anterior, según la tabla 4.6 debemos proponer una solución particular de la forma Ae^{5x}. Sin embargo, este término no es independiente del término con c_1 en la solución homogénea asociada $y_h = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x}$. Esto viola la regla de independencia lineal.

Para solventar esta situación, multiplicamos el término Ae^{5x} por la menor potencia de x que lo haga linealmente independiente de los términos en la solución homogénea. Así, la solución particular propuesta debe ser

$$y_p = Axe^{5x},$$

Ahora, esta solución ya es independiente de la solución homogénea asociada.

Ejemplo 4.6.9 (Correción del ejemplo anterior)**.** Resolvemos de nuevo la ecuación $y'' - 3y' - 10y = 8e^{5x}$, ahora proponiendo una solución particular correcta

- y_p Proponemos una solución particular de forma $y_p = Axe^{5x}$.
  Las derivadas de esta función son $y_p' = 5Axe^{5x} + Ae^{5x}$, $y_p'' = 25Axe^{5x} + 5Ax^{5x} + 5Ae^{5x} = 25xe^{5x} + 10Ae^{5x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

  $$8e^{5x} = y_p'' - 3y_p' - 10y_p = (25Axe^{5x} + 10Ae^{5x}) - 3(5Axe^{5x} + Ae^{5x}) - 10Axe^{5x} = 7Ae^{5x},$$

  de ahí que $8 = 7A$, o $A = \frac{8}{7}$. Así, la solución particular es $y_p = \frac{8}{7}e^{5x}$,

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^{5x} + c_2e^{-2x} + \frac{8}{7}xe^{5x}.}$

Ejemplo 4.6.10. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y' = 2x^2 - 3x + 6$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos en dos partes:

- y_h: Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2 + 4D = D(D + 4) = 0$. Las raíces son $m = 0$ y $m = -4$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

  $$y_h(x) = c_1 + c_2e^{-4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- y_p Hallamos la solución particular. Observe que la función del lado derecho de la ecuación diferencial es un polinomio de grado 2. Esto sugiere que debemos proponer una solución particular de forma que y_p sea un polinomio de grado 2. Así,

  $$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

  Sin embargo, observe que el término constante C no es independiente de la solución homogénea asociada (pues y_h ya contiene un término constante c_1). Para evitar esta dependencia, multiplicamos toda la solución por la menor potencia de x que haga los términos independientes. En este caso, la menor potencia es x. Así, proponemos

  $$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

  Ahora ya obtenemos términos linealmente independientes de y_h. Las derivadas de esta la solución particular son $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_p'' = 6Ax + 2B$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

  $$2x^2 - 3x + 6 = y_p'' + 45y_p' = (6Ax + 2B) + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12Ax^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C).$$

De ahí que $12A = 2$, $6A+8B = -3$ y $2B+4C = 6$. Luego $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{-3-6A}{8} = -\frac{1}{2}$ y $C = \frac{6-2B}{4} = \frac{7}{4}$. Portanto, la solución particular es

$$y_p = \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{7}{4}x,$$

y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1 + c_2e^{-4x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x}$.

4.7. Coeficientes indeterminados, método del anulador

En esta sección estudiamos un segundo método para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, con coeficientes constantes

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Veremos que esta técnica funciona para un conjunto muy restricto de funciones $f(x)$, pero que facilita bastante la solución en estos casos. Esta nueva filosofía proporciona un primer método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

4.7.1. Factoración de operadores

Vimos que una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes puede escribirse en términos de operadores diferenciales D^k. En muchos casos, podemos manipular el operador D como una variable algebraica. Es decir, podemos olvidar temporalmente el significado del operador como una derivada, y tratarlo meramente como una expresión algebraica. Con esto en mento, podemos ver un operador diferencial L como un polinomio en la variable D:

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Podemos manipular estos operadores, como si fuesen polinomios ordinario: podemos sumarlos, restarlos, multiplicarlos, factorizarlos.

Cuando los coeficientes son constantes, factorizar estos polinomios en D nos ayuda hallar la solución general de modo más simple. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7.1. La ecuación lineal $y'' + 5y' + 6y = 0$, se escribe en forma de operadores como $(D^2 + 5D + 6)y = 0$. Este operador se factoriza como

$$(D + 2)(D + 3)y = 0.$$

Sabemos que la solución general de la ecuación anterior es $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$. Si analizamos los términos de esta solución, veremos cada cada uno está ligado a un factor del operador diferencial $(D + 2)(D + 3)$. Sean $y_1 = c_1e^{-2x}$, $y_2 = c_2e^{-3x}$.

- El término $y_1 = c_1e^{-2x}$ está ligado al factor $D + 2$. Observe que si aplicamos el operador $D + 2$ a y_1

$$(D + 2)y_1 = y_1' + 2y_1 = -2c_1e^{-2x} + 2(c_1e^{-2x}) = 0,$$

obtenemos precisamente 0.

- El término $y_2 = c_2e^{-3x}$ está ligado al factor $D+3$. Observe que si aplicamos el operador $D+3$ a y_2

$$(D+3)y_2 = y_2' + 3y_2 = -3c_2e^{-3x} + 3(c_2e^{-3x}) = 0,$$

  obtenemos precisamente 0.

Por otro lado, es claro que $(D+3)y_1 \neq 0$ y $(D+2)y_2 \neq 0$.

Esta idea de obtener un operador diferencial que, aplicado a una función $f(x)$, de exactamente la función 0 es útil. Concretizemos esta idea en la siguiente

Definición 4.7.2. Sea $f(x)$ una función (de la variable independiente), que es n veces diferenciable. Un operador diferencial $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0$ es un *anulador* (o *aniquilador*) para $f(x)$ si

$$Lf = L\big(f(x)\big) = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D + a_0)f = 0.$$

Esto es, L es un anulador de f si $f \in \operatorname{Ker} L$.

Tenemos una tabla para los anuladores de funciones simples:

Al igual que en el método de los coeficientes indeterminados, el método del anulador se aplica cuando:

- los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes,
- la función $f(x)$ es alguno de los siguientes tipos:
  - funciones constantes $f(x) = b$,
  - funciones polinomiales $f(x) = b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0$,
  - funciones exponenciales $f(x) = be^{ax}$,
  - funciones trigonométricas de la forma $f(x) = a\cos bx$ ó $f(x) = a\sin bx$,
  - cualquier suma o producto de un número finito de las anteriores.

Función $f(x)$	Anulador
c	D
cx	D^2
cx^2	D^3
$\vdots$	$\vdots$
cx^n	D^{n+1}
ce^{ax}	$D-a$
$\vdots$	$\vdots$
$cx^n e^{ax}$	$(D-a)^{n+1}$
$c\cos bx,\ c\sin bx$	D^2+b^2
$\vdots$	$\vdots$
$cx^n\cos bx,\ cx^n\sin bx$	$(D^2+b^2)^{n+1}$
$ce^{ax}\cos bx,\ ce^{ax}\sin bx$	$(D-(a+bi))(D-(a-bi)) = D^2-2aD+a^2+b^2$
$\vdots$	$\vdots$
$cx^n e^{ax}\cos bx,\ cx^n e^{ax}\sin bx$	$(D^2-2aD+a^2+b^2)^{n+1}$

4.7.2. El método del anulador

El método del anulador consiste en tomar una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

reescrita en forma de operadores

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y = f(x).$$

El objetivo es hallar un anulador L para la función $f(x)$. Al aplicar el operador L en ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} L(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y &= L(f(x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal homogénea. Esta nueva ecuación homogénea obtenida se puede resolver por los métodos ya aprendidos an las aulas anteriores.

Ejemplo 4.7.3. Resolver la ecuación $y'' - 5y' + 4y = 3x + 1$.
La ecuación es lineal con coeficientes constantes y no homogénea. En forma de operadores, la ecuación es $(D^2 - 5D + 4)y = (D-1)(D-4)y = 3x+1$. Del lado derecho, la función es $f(x) = 3x + 1$. Un anulador para esta función es D^2. Aplicando este opedaror en ambos lador obtenemos

$$D^2(D-1)(D-4)y = D^2(3x+1) = 0.$$

Debemos resolver la ecuación diferencial homogénea $D^2(D-1)(D-4)y = 0$. El polinomio característico $D^2(D-1)(D-4)$ tiene raíces $m = 0$ con multiplicidad 2, $m = 1$ y $m = 4$. La solución general de esta ecuación es

$$y = c_1e^x + c_2e^{4x} + c_3 + c_4x.$$

De esta solución, la parte que proviene del la ecuación homogénea asociada $y'' - 5y' + 4y = 0$, corresponde al operador $(D-1)(D-4)y = 0$, consiste de los términos $y_h = c_1e^x + c_2e^{4x}$. La parte que corresponde a la solución particular corresponde al otro factor D^2 del operador $D^2(D-1)(D-4)$, y consiste de los términos $y_p = c_3 + c_4x$. En este caso, sustituímos y_p en la ecuación diferencial para obtener las constantes apropiadas:

$$3x + 1 = y_p'' - 5y_p' + 4y_p = 0 - 5(c_4) + 4(c_3 + c_4x) = 4c_4x + (4c_3 - 5c_4).$$

De ahí que $4c_4 = 3 \Rightarrow c_4 = \frac{3}{4}$ y $4c_3 - 5c_4 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1+5c_4}{4} = \frac{1+15/4}{4} = \frac{19}{16}$.

Portanto, la solución de la ecuación es $\boxed{y(x) = c_1e^x + c_2e^{4x} + \frac{3}{4}x + \frac{19}{16}.}$

Ejemplo 4.7.4. Hallar la solución general de la ecuación $y''' - y'' + y' - y' = x^2 + x$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Escrita en forma de operador, la ecuación es $(D^3 - D^2 + D - 1)y = x^2 + x$. Del lado izquierdo, tenemos el operador $D^3 - D^2 + D - 1 = (D-1)(D^2+1)$. Del lado derecho, tenemos la función $x^2 + x$. Un anulador para esta función es D^3. Aplicando este operador de ambos lados, obtenemos la ecuación homogénea

$$D^3(D-1)(D^2+1)y = D^3(x^2+x) = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es $D^3(D-1)(D^2+1) = 0$. Las raíces son $m = 0$ con multiplicidad 3 y $m = 1$ y $m = \pm i$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 + c_5x + c_6x^2.$$

La parte homogénea proviene del operador $(D-1)(D^2+1)$ y los términos $y_h = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x$. La solución particular proviene de D^3 y es $y_p = c_4 + c_5x + c_6x^2$.
Las derivadas de esta función son $y_p' = 2c_6x + c_5$, $y_p'' = 2c_6$, $y_p''' = 0$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$x^2+x = y_p'''-y_p''+y_p'-y_p = 0-2c_6+(2c_6x+c_5)-(c_6x^2+c_5x+c_4) = -c_6x^2+(2c_6-c_5)x+(c_5-2c_6-c_4).$$

De ahí que $c_6 = -1$, $2c_6 - c_5 = 1$ y $c_5 - 2c_6 - c_4 = 0$. Luego, $c_5 = 2c_6 - 1 = -3$ y $c_4 = c_5 - 2c_6 = -1$.

Portanto la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\sin x + x^2 - 3x - 1.}$

Ejemplo 4.7.5. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y' - 2y = 4e^{2x}$.
La ecuación es lineal no homogénea con coeficientes constantes. Resolvemos por el método del anulador. En términos de operadores, la ecuación es $(D^2+4D-2)y = 4e^{2x}$. El operador diferencial del lado izquierdo es $D^2 + 4D - 2 = (D - (-2 - \sqrt{6}))(D - (-2 + \sqrt{6}))$. Del lado derecho, tenemos la función $4e^{2x}$. Un anulador para esta función es $D-2$. Aplicando este operador en ambos lados, obtenemos la ecuación homogénea

$$(D - 2)(D^2 + 4D - 2)y = (D - 2)(4e^{2x}) = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es $(D - 2)(D^2 + 4D - 2) = (D - 2)(D - (-2 - \sqrt{6}))(D - (-2 + \sqrt{6}))$. Las raíces de este polinomio son $m = -2 \pm \sqrt{6}$ y $m = 2$, luego la solución general es:

$$y = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x} + c_3e^{2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

La parte homogénea consiste de $y_h = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x}$. La solución particular es $y_p = c_3e^{2x}$, y sus derivada son $y_p' = 2c_3e^{2x}$, $y_p'' = 4c_3e^{2x}$. Para hallar la constante de la solución particular, sustituimos las derivadas en la ecuación diferencial:

$$4e^{2x} = y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 4c_3e^{2x} + 4(2c_3e^{2x}) - 2(c_3e^{2x}) = 10c_3e^{2x}.$$

De ahí que $10c_3 = 4$, o sea $c_3 = \frac{2}{5}$.
Portanto, la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2e^{(-2-\sqrt{6})x} + \frac{2}{5}e^{2x}.}$

Ejemplo 4.7.6. Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 6\sin 3x$.
Resolvermos por el método del anulador. En términos de operadores, la ecuación anterior se escribe $(D^2 + 4D + 4)y = 6\sin 3x$. El operador del lado izquierdo es $D^2 + 4D + 4 = (D+2)^2$. La función del lado derecho es $6\sin 3x$. Un anulador para esta función es D^2+9. Aplicando este operador a ambos lados, obtenemos

$$(D^2 + 9)(D^2 + 4D + 4) = (D^2 + 9)(6\sin 3x) = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es $(D^2+9)(D^2+4D+4) = (D^2+9)(D+2)^2$. Las raíces de este polinomio son $m = -2$, con multiplicidad 2 y $m = \pm 3i$. La solución general es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es $y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$. La solución particular es $y_p = c_3\cos 3x + c_4 \sin 3x$, y sus derivadas son $y_p' = -3c_3 \sin 3x + 3c_4 \cos 3x$ y $y_p'' = -9c_3 \cos 3x - 9c_4 \sin 3x$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\begin{aligned} 6\sin 3x &= y_p'' + 4y_p' + 4y_p = (-9c_3\cos 3x - 9c_4 \sin 3x) + 4(-3c_3 \sin 3x + 3c_4\cos 3x) + 4(c_3\cos 3x + c_4 \\ &= (-5c_3 + 12c_4)\cos 3x + (-5c_4 - 12c_3)\sin 3x. \end{aligned}$$

Luego, $-5c_3 + 12c_4 = 0$ y $-5c_4 - 12c_3 = 6$, o sea que $c_3 = -\frac{72}{169}$ y $c_4 = -\frac{30}{169}$.

Portanto, la solución general es $\boxed{y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - \frac{72}{169}\cos 3x - \frac{30}{169}\sin 3x.}$

Precisamos ahora de un método para resolver ecuaciones no homogéneas donde la función $f(x)$ sea más elaborada. Una forma de resolver estos casos es aplicar el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas visto en el aula anterior.

Ejemplo 4.7.7 (Usando el principio de superposición)**.** Hallar la solución general de la ecuación $y'' + 2y = e^{3x} + \frac{1}{2}x - 3 + 5\cos x$.

Resolvemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 2y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $D^2+2 = 0$. Las raíces de este polinomio son $m = \pm\sqrt{2}i$, luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Para hallar la solución particular, la función del lado derecho es $e^{3x} + \frac{1}{2}x - 3 + 5\cos x$. Esta función contiene un término exponencial, una parte polinomial, y el último término es una función trigonométrica. En lugar de proponer una solución particular que satisfaga estas tres características, podemos partir la ecuación anterior en tres ecuaciones más simples:

$$\begin{aligned} y'' + 2y &= e^{3x}, \\ y'' + 2y &= \tfrac{1}{2}x - 3, \\ y'' + 2y &= 5\cos x. \end{aligned}$$

Construimos tres soluciones particulares y_{p1}, y_{p2} y y_{p3} (una para cada una de las ecuaciones anteriores).

Resolvemos y_{p1}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = e^{3x}$, aplicamos el anulador $D - 3$ en ambos lados de la ecuación. Así tenemos $(D-3)(D^2+2)y = 0$, cuya solución general es $y_1 = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x + c_3e^{3x}$. Para hallar la solución particular $y_{p1} = c_3e^{3x}$, sustituimos $e^{3x} = y_{p1}'' + 2y_{p1} = 9c_3e^{3x} + 2c_3e^{3x} = 11c_3e^{3x}$, y obtenemos $c_3 = \frac{1}{11}$. Así

$$y_{p1} = \tfrac{1}{11}e^{3x}.$$

Resolvemos y_{p2}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = \frac{1}{2}x - 3$, aplicamos el anulador D^2 en ambos lados de la ecuación. Así tenemos $D^2(D^2+2)y = 0$, cuya solución general es $y_2 = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + c_3 x + c_4$. Para hallar la solución particular $y_{p2} = c_3 x + c_4$ sustituimos $\frac{1}{2}x - 3 = y''_{p2} + 2y_{p2} = 0 + 2(c_3 x + c_4) = 2c_3 x + 2c_4$, y tenemos $c_3 = \frac{1}{4}$, $c_4 = -\frac{3}{2}$. Luego,

$$y_{p2} = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}.$$

Resolvemos y_{p3}: Para resolver la ecuación no homogénea $y'' + 2y = 5\cos x$, aplicamos el anulador $D^2 + 1$ en ambos lador de la ecuación. Tenemos $(D^2+1)(D^2+2)y = 0$, cuya solución general es $y_3 = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$. Para hallar la solución particular $y_{p3} = c_3 \cos x + c_4 \sin x$, sustituimos sus derivadas $y'_{p3} = -A\sin x + B\cos x$, $y''_{p3} = -A\cos x - B\sin x$. Luego, $5\cos x = y''_{p3} + 2y_{p3} = -c_3\cos x - c_4 \sin x + 2(c_3\cos x + c_4 \sin x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x$. De ahí que $c_3 = 0$, $c_4 = 5$. Así,

$$y_{p3} = 5\sin x.$$

Por el principio de superposición, la solución particular debe ser $y_p = \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + 5\sin x$, y la solución general es $\boxed{y(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x + \frac{1}{11}e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + 5\sin x.}$

Esta metodología anterior, puede mejorarse si logramos encontrar un operador anulador para una función $f(x)$ que consiste de la suma de varios términos para los cuales conocemos sus respectivos anuladores. Esto es el contenido del

Proposición 4.7.8 (Principio de superposición para Anuladores)**.** *Suponga que $L_1, L_2, \ldots, L_k$ son operadores anuladores para las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, respectivamente, (es decir L_i es un anulador para $f_i(x)$. Entonces, el operador*

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_k$$

es un anulador de la función $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$.

Prueba. Sabemos que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ vale $L_i f_i = 0$, pues L_i anula a la función f_i. Como los operadores diferenciales conmutan, esto es $L_i \cdot L_j = L_j \cdot L_i$. Basta reescribir el operador L en la forma apropiada. Así, para cada i

$$\begin{aligned} L(f_i) &= (L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_k)(f_i) = \prod_{j=1}^{n} L_j(f_i) = \prod_{j\neq i} L_j \cdot L_i(f_i) \\ &= \prod_{j\neq i} L_j \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7.9. Recalculamos el ejemplo anterior usando este nuevo principio. Queremos de nuevo hallar la solución general de la ecuación $y'' + 2y = e^{3x} + \frac{1}{2}x - 3 + 5\cos x$. Escribiendo la ecuación en la notación de operadores, tenemos $(D^2+2)y = e^{3x} + \frac{1}{2}x -$

$3+5\cos x$. El operador del lado izquierdo es D^2+2. Del lado derecho, tenemos la función $e^{3x}+\frac{1}{2}x-3+5\cos x$, conformada por un término exponencial, una parte polinomial, y el último término es una función trigonométrica. Observe que

$$\begin{array}{rl} D-3 & \text{es un anulador para el término } e^{3x} \\ D^2 & \text{es un anulador para los términos } \frac{1}{2}x-3 \\ D^2+1 & \text{es un anulador para el término } 5\cos x \end{array}$$

Usando el principio de superposición para anuladores, sabemos que $L=D^2(D-3)(D^2+1)$ es un aniquilador para $e^{3x}+\frac{1}{2}x-3+5\cos x$. Aplicando este operador en ambos lados de la ecuación diferencial tenemos El polinomio característico de esta ecuación es $D^2(D-3)(D^2+1)(D^2+2)$. Las raíces de este polinomio son $m=0$ con multiplicidad 2, $m=3$, $m=\pm i$ y $m=\pm\sqrt{2}i$, luego la solución general es

$$y=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x+c_3x+c_4+c_5e^{3x}+c_6\cos x+c_7\sin x.$$

La solución homogénea asociada es $y_h=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x$. La parte que proviene de la solución particular es $y_p=c_3x+c_4+c_5e^{3x}+c_6\cos x+c_7\sin x$ y sus derivadas son $y_p'=c_3+3c_5e^{3x}-c_6\sin x+c_7\cos x$ y $y_p''=9c_5e^{3x}-c_6\cos x-c_7\sin x$. Al sustituir estas derivadas en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{3x}+\tfrac{1}{2}x-3+5\cos x &= y_p''+2y_p \\ &= 9c_5e^{3x}-c_6\cos x-c_7\sin x+2(c_3x+c_4+c_5e^{3x}+c_6\cos x+c_7\sin x) \\ &= 2c_3x+c_4+11c_5e^{3x}+c_6\cos x+c_7\sin x. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema, encontramos que $c_3=\frac{1}{4}$, $c_4=-\frac{3}{2}$, $c_5=\frac{1}{11}$, $c_6=0$ y $c_7=5$. Así, la solución general debe ser

$$\boxed{y(x)=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x+\tfrac{1}{11}e^{3x}+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{3}{2}+5\sin x.}$$

La ventaja que fornece el método del anulador con respecto al método de coeficientes indeterminados es que el primero ya incluye las posibles fallas que ocurren en el método de coeficientes indeterminados cuando hay dependencia entre los términos de la solución homogénea y_p y la solución particular y_p. Consideremos un último ejemplo.

Ejemplo 4.7.10. Hallar la solución general de la ecuación $y''-3y'-10y=8e^{5x}$.
En el aula anterior, vimos que al proponer una solución particular de la forma $y_p=Ae^{5x}$ obtenemos una contradicción, y por lo tanto debemos modificar nuestra solución propuesta a la forma $y_p=Axe^{5x}$.

Con el método del anulador, simplemente basta ver que $D-5$ es un aniquilador para $8e^{5x}$. Aplicando en ambos lados de la ecuación, observamos que

$$(D-5)(D^2-3D-10)y=(D-5)(D-5)(D+2)y=(D-5)(8e^{5x})=0.$$

El operador del lado izquierdo tiene polinomio característica $(D-5)^2(D+2)$. Las raíces son $m=5$ con multiplicidad 2 y $m=-2$, luego la solución de la ecuación general es:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{5x}+c_3xe^{5x}, \quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}.$$

La parte homogénea consiste de $y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{5x}$. La solución particular es $y_p=c_3xe^{5x}$, y sus derivadas son $y_p'=5c_3xe^{5x}+c_3e^{5x}$, $y_p''=25c_3xe^{5x}+5c_3x^{5x}+5c_3e^{5x}=25c_3xe^{5x}+10c_3e^{5x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$8e^{5x}=y_p''-3y_p'-10y_p=(25c_3xe^{5x}+10c_3e^{5x})-3(5c_3xe^{5x}+c_3e^{5x})-10c_3xe^{5x}=7c_3e^{5x},$$

de ahí que $8=7c_3$, o $c_3=\frac{8}{7}$. Así, la solución general es $\boxed{y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{5x}+\frac{8}{7}xe^{5x}.}$

4.8. Método de operadores para resolver sistemas lineales (Eliminación)

En el aula anterior vimos que las ecuaciones lineales pueden resolverse con métodos de operadores diferenciales. En particular, vimos que cada ecuación diferencial lineal puede escribirse en la notación de operadores; luego efectuamos cierto tratamiento algebraico sobre estos operadores, de forma que estos métodos algebraicos conduzcan a encontrar la solución de la ecuación diferencial.

Veremos en esta sección que podemos aplicar métodos algebraicos similares a sistemas de ecuaciones diferenciales. Como una primera aproximación a las técnicas de resolución de sistemas de EDO lineales, estudiamos el método de operadores. Más adelante desarrollaremos otros métodos para resolver estos mismos sistemas.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes que involucra n funciones independientes $x_1, x_2 \ldots, x_n$, que dependen de una variable independientes (usualmente t), el cual se escribe en la notación de operadores

$$\begin{aligned} L_{11}x_1(t) + L_{12}x_2(t) + \ldots + L_{1n}x_n(t) &= f_1(t), \\ L_{21}x_1(t) + L_{22}x_2(t) + \ldots + L_{2n}x_n(t) &= f_2(t), \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ L_{n1}x_1(t) + L_{n2}x_2(t) + \ldots + L_{nn}x_n(t) &= f_n(t), \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

donde los L_{ij} son operadores diferenciales con coeficientes constantes, esto es $L_{ij} = \sum_{k=0}^{n_{ij}} a_{ijk}D^k$ es un polinomio en D con coeficientes constantes.

Al igual que en las ecuaciones lineales, podemos tratar los operadores L_{ij} como si fuesen símbolos algebraicos en la variable D, y resolver el sistema (4.8.1) como si se tratase de un sistema lineal algebraico en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ejemplo 4.8.1. Resolver el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = 3y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x.$$

El sistema anterior puede reescribirse como $\begin{array}{rl} x'-3y &= 0, \\ -2x+y' &= 0, \end{array}$, o en notación de operadores

$$\begin{array}{rcl} Dx - 3y &=& 0, \\ -2x + Dy &=& 0, \end{array} \quad \text{o equivalentemente,} \quad \begin{pmatrix} D & -3 \\ -2 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tratando a D como un término algebraico más, el anterior es un sistema lineal y puede resolverse con cualquiera de los métodos aprendidos en álgebra lineal (sustitución, eliminación gaussiana, regla de Cramer, matrix inversa, ...).

Resolvemos por el método de eliminación. Para eliminar la x: multiplicando la primera fila por 2, y multiplicando la segunda fila por D. Sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 2Dx - 6y &=& 0, \\ -2Dx + D^2y &=& 0 \\ \hline D^2y - 6y &=& 0. \end{array}$$

Para eliminar la y: multiplicando la primera fila por D, y multiplicando la segunda fila por 3. Sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} D^2x - 3Dy &=& 0, \\ -6x + 3Dy &=& 0 \\ \hline D^2x - 6x &=& 0. \end{array}$$

Como resultado, obtenemos dos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, independientes una de la otra. Podemos resolver cada una de estas con los métodos ya aprendidos. La solución general de la ecuación diferencial $(D^2 - 6)x = 0$ es

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t},$$

La solución general de la ecuación diferencial $(D^2 - 6)y = 0$ es

$$y(t) = c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}.$$

Es importante aclarar que las soluciones anteriores no conforman la solución general del sistema lineal incial. Esto se sigue del hecho que al ser un sistema, las variables $x(t)$ y $y(t)$ no son independientes (hay una relación entre ellas dada por el sistema). Para hallar esta relación, podemos sustituir las soluciones encontradas en cada una de las ecuaciones del sistema.
De la primera ecuación $Dx - 3y = 0$, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} D(c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}) - 3(c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}) &=& 0 \\ \sqrt{6}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \sqrt{6}c_2 e^{-\sqrt{6}t} - 3c_3 e^{\sqrt{6}t} - 3c_4 e^{-\sqrt{6}t} &=& 0 \\ (\sqrt{6}c_1 - 3c_3)e^{\sqrt{6}t} + (-\sqrt{6}c_2 - 3c_4)e^{-\sqrt{6}t} &=& 0. \end{array}$$

De ahí que las constantes $\sqrt{6}c_1 - 3c_3 = 0$ y $-\sqrt{6}c_2 - 3c_4 = 0$. Luego, $c_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}c_1$ y $c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{3}c_2$ proporcionan la relación requerida. Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{array}{rcl} x(t) &=& c_1 \cos \sqrt{6}t + c_2 \sin \sqrt{6}t, \\ y(t) &=& \frac{\sqrt{6}}{3}c_1 \cos \sqrt{6}t - \frac{\sqrt{6}}{3}c_2 \sin \sqrt{6}t. \end{array}$$

Observación 4.8.2. Los métodos que mejor funcionan en el caso de sistemas lineales con operadores, son los de sustitución, eliminación o eliminación gaussiana. Los otros métodos como Cramer y matriz inversa suelen contener coeficientes fraccionarios y en el caso de operadores, es probable obtener coeficientes donde los operadores D aparezcan en el denominador (y aún no hemos visto una interpretación para eso).
En el caso de la eliminación gaussiana, se sugiere ordenar las filas de modo que los elementos pivotes sean siempre coeficientes numéricos.

Una alternativa para resolver el sistema anterior es que, en lugar de efectuar dos eliminaciones y obtener ecuaciones independientes para $x(t)$ y $y(t)$, la eliminación se haga sólo una vez:

Ejemplo 4.8.3. Resolver el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = 3y, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x.$$

En notación de operadores

$$\begin{array}{rcl} Dx - 3y & = & 0, \\ -2x + Dy & = & 0, \end{array} \quad \text{o equivalentemente,} \quad \begin{pmatrix} D & -3 \\ -2 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos por el método de eliminación. Para eliminar la y: multiplicando la primera fila por D, y multiplicando la segunda fila por 3. Sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} D^2x - 3Dy & = & 0, \\ -6x + 3Dy & = & 0 \\ \hline D^2x - 6x & = & 0. \end{array}$$

La solución general de esta ecuación diferencial $(D^2 - 6)x = 0$ es

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}.$$

Tomando ahora la primera ecuación, de ella podemos despejar y directamente. Tenemos $y = \frac{1}{3}Dx$. Así

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \frac{1}{3}x'(t) = \frac{1}{3}(\sqrt{6}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \sqrt{6}c_2 e^{-\sqrt{6}t}) \\ & = & \frac{\sqrt{6}}{3}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{3}c_2 e^{-\sqrt{6}t}, \end{array}$$

que es la misma solución obtenida en el ejemplo anterior.

Ejemplo 4.8.4. Resolver $\begin{array}{rcl} x' - 4x + y'' & = & t^2 \\ x' + x + y' & = & 0 \end{array}.$
En notación de operadores tenemos

$$\begin{array}{rcl} Dx - 4x + D^2y & = & t^2, \\ Dx + x + Dy & = & 0, \end{array} \quad \text{o equivalentemente,} \quad \begin{pmatrix} D-4 & D^2 \\ D+1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe en este caso que la matriz de coeficientes consiste únicamente de operadores. En este caso, los métodos de eliminación gaussiana, Cramer o matriz inversa conducen a coeficientes fraccionarios $\frac{f(D)}{g(D)}$. Con lo que sabemos hasta ahora, no es aconsejable seguir estos métodos.

Resolvemos por el método de eliminación. A simple vista, resulta más fácil eliminar la variable y: multiplicamos la primera fila por -1, multiplicamos la segunda fila por D. Sumando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -Dx + 4x - D^2y &=& -t^2, \\ D^2x + Dx + D^2y &=& 0 \\ \hline D^2x + 4x \qquad &=& -t^2. \end{array}$$

Esta es una ecuación lineal no homogénea de orden 2. Al resolver esta ecuación, obtenemos una solución de la forma

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{1}{8}.$$

Tomando ahora la segunda ecuación del sistema, de ella podemos despejar y' directamente. Tenemos $y' = -Dx - x$. Así

$$\begin{aligned} y'(t) &= -x'(t) - x(t) = -(-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t - \tfrac{1}{2}t) - (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{1}{8}) \\ &= (-c_1 - 2c_2)\cos 2t + (2c_1 - c_2)\sin 2t + \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Integrando esta última ecuación, obtenemos

$$y(t) = \tfrac{1}{2}(-c_1 - 2c_2)\sin 2t - \tfrac{1}{2}(2c_1 - c_2)\cos 2t + \tfrac{1}{12}t^3 - \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{8}t + c_3.$$

Veamos un ejemplo donde el método de eliminación aparentemente es más complicado.

Ejemplo 4.8.5. Resolver $\begin{array}{rcl} x'' - y' &=& t \\ x' + 3x + y' + 3y &=& 2 \end{array}$, sujeto a $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{2}$ y $y(0) = 0$.

En notación de operadores tenemos

$$\begin{array}{rcl} D^2x - Dy &=& t, \\ Dx + 3x + Dy + 3y &=& 2, \end{array} \quad \text{o equivalentemente,} \quad \begin{pmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, la matriz de coeficientes consiste únicamente de operadores. Resolvemos por el método de eliminación. A simple vista intentar eliminar la x o la y parece imposible, debido a que en la segunda ecuación hay varios términos para cada variable. En estos casos, se aconseja agrupar los distintos términos de modo que en cada ecuación del sistema, cada variable esté multiplicada por un único operador diferencial. Reescribimos el sistema como

$$\begin{array}{rcl} D^2x - Dy &=& t, \\ (D+3)x + (D+3)y &=& 2 \end{array}$$

Ahora, para eliminar la variable y, podemos multiplicar la primera ecuación por $D+3$, multiplicar la segunda ecuación por D, y sumar. Obtenemos

$$\begin{array}{rcl} D^2(D+3)x - D(D+3)y & = & (D+3)t, \\ D(D+3)x + D(D+3)y & = & D(2) \\ \hline D^2(D+3)x + D(D+3)x & = & 1+3t, \end{array}$$

y obtenemos la ecuación lineal no homogénea de orden 3 $D(D+1)(D+3)x = 1+3t$. Al resolver esta ecuación, obtenemos la solución

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} + c_3 - t + \tfrac{1}{2}t^2.$$

De la primera ecuación del sistema, podemos despejar y'. Tenemos $y' = D^2 x - t$. Así

$$y'(t) = x'' - t = 9c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} + 1 - t.$$

Integrando esta última ecuación, obtenemos

$$y(t) = -3c_1 e^{-3t} - c_2 e^{-t} + t - \tfrac{1}{2}t^2 + c_4.$$

De las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = 0$, obtenemos $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{5}{2}$, $c_3 = \frac{13}{6}$ y $c_4 = -\frac{3}{2}$. Portanto, la solución es

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{6} - t + \frac{1}{2}t^2, \\ y(t) & = & -e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{-t} + t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}. \end{array}$$

4.9. Variación de parámetros

En las secciones anteriores estudiamos cómo resolver ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes, cuando la función $f(x)$ que aparece en el lado derecho de la ecuación pertenece a un conjunto reduzido de funciones. Recordemos que el método de coeficientes indeterminados y el método del anulador pueden usarse cuando la función $f(x)$ es polinomial, exponencial, trigonométrica (cos y sin), o cuando $f(x)$ es una combinación de sumas y productos de éstas.

¿Qué ocurre cuando $f(x)$ asume formas más generales? En esta sección desarrollamos un método que sirve para resolver ecuaciones lineales no homogéneas, cuando $f(x)$ es cualquier función de la variable independiente. Veremos que este método resulta ser tan poderoso, que incluso es útil para resolver ecuaciones lineales donde los coeficientes no son constantes.

Considere una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, escrita en su forma normal

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x). \tag{4.9.1}$$

Para resolver esta ecuación, recordemos que la teoría de ecuaciones lineales indicar resolver en tres etapas:

Paso 1: Hallar la solución general y_h de la ecuación homogénea asociada.

Paso 2: Identificar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea.

Paso 3: Sumar $y(x) = y_p + y_h$.

Para hallar la solución de la ecuación homogénea asociada, procedemos como en los métodos ya vistos. Para hallar la solución particular, los métodos de coeficientes indeterminados y del aniquilador ya no son suficientes. Por ello, recurrimos a una técnica diferente. El método de variación de parámetros se utiliza para construir una solución particular y_p acorde a la función $f(x)$ que aparece en el lado derecho de la ecuación (4.9.1).

Recordemos el método de variación de parámetros que utilizamos cuando resolvimos ecuaciones lineales de primer orden $y' + p(x)y = f(x)$ (vea Aula 08). A partir de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y_h = ce^{\int p(x)\,dx}$$

tomamos la función base $y_1(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$. El método de variación de parámetros consistía en suponer que la solución particular de la ecuación no homogénea era también un múltiplo de y_1; sólo que en lugar de que fuese un múltiplo constante, asumimos una solución particular y_p de la forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int p(x)\,dx},$$

donde $u(x)$ era una función de x a determinar. La idea era extender el parámetro c a una función, de modo que se ampliase el conjunto de posibles funciones para resolver la ecuación diferencial.

En el caso de ecuaciónes lineales de orden superior, la idea es la misma. La solución general de la ecuación lineal homogénea hallada en el Paso 1 es de la forma

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \tag{4.9.2}$$

donde $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. El método de variación de parámetros consiste en extender las constantes $c_1, c_2 \ldots, c_n$ en la ecuación (4.9.2) a funciones de x. De ahí que se propone una solución particular y_p de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x), \tag{4.9.3}$$

donde las $u_1, u_2, \ldots, u_1$ son funciones apropiadas a encontrar. Únicamente necesitamos entonces idear un mecanismo que permita determinar estas funciones coeficientes $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

4.9.1. Mecanismo para hallar los coeficientes: regla de Cramer

Orden 2: Consideremos el caso de una ecuación lineal no homogénea de orden 2: $y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$, escrita en su forma normal. Sea

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

la solución de la ecuación homogénea asociada, donde $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Proponemos ahora una solución particular de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{4.9.4}$$

con $u_1(x), u_2(x)$ funciones diferenciables. Las derivadas de la solución particular propuesta están dadas por

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \\ &= u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2''. \end{aligned}$$

Al sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación diferencial original, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= y_p'' + a_1y_p' + a_0y_p \\ &= (u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'') + a_1(u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2') + \\ &\quad + a_0(u_1y_1 + u_2y_2) \\ &= u_1(\underbrace{y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1}_{=0}) + u_2(\underbrace{y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2}_{=0}) + u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + a_1u_1'y_1 + a_1u_2'y_2 \\ &= \frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1'y_1' + u_2'y_2'), \end{aligned}$$

donde los términos $y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1 = 0$ y $y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2 = 0$ son cero, pues y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada. En resumen, la ecuación diferencial original se reduce a

$$\frac{d}{dx}(u_1'y_1 + u_2'y_2) + a_1(u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1'y_1' + u_2'y_2') = f(x). \tag{4.9.5}$$

Esta última es una nueva ecuación diferencial en dos variables: u_1 y u_2. Así como tal, esta ecuación es difícil de resolver. Sin embargo, haciendo algunas suposiciones adicionales, esta ecuación se simplifica. De hecho si observamos, el término encerrado en los primeros dos paréntesis de (4.9.5) es idéntico. Una suposición inteligente que podemos hacer es igualar este término a cero:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{4.9.6}$$

Este supuesto, hace que la ecuación (4.9.5) se reduzca a

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = 0. \tag{4.9.7}$$

Juntando la información en (4.9.6) y (4.9.7), debemos hallar funciones u_1' y u_2' que satisfagan el sistema

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x), \end{aligned} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. Podemos resolverlo con los métodos del álgebra lineal. Es usual que en el método de variación de parámetros, éste se resuelva usando el método de Cramer. Definamos los determinantes

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}.$$

Observe en particular que el determinante W es exactamente el wronskiano de las funciones y_1 y y_2: $W = W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2$. El método de Cramer nos dice que la solución del sistema anterior está dada por

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} &= -\frac{y_2(x) f(x)}{W[y_1, y_2]}, \\ u_2' &= \frac{W_2}{W} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2]} &= \frac{y_1(x) f(x)}{W[y_1, y_2]}. \end{aligned} \tag{4.9.8}$$

Al integrar ambas ecuaciones en (4.9.8) obtenemos las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ requeridas.

<u>Orden 3</u>: Consideremos ahora el caso de una ecuación lineal no homogénea de orden 3: $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, escrita en su forma normal. Sea

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$$

la solución de la ecuación homogénea asociada, donde $\{y_1, y_2, y_3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. Proponemos ahora una solución particular de la forma

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) + u_3(x) y_3(x), \tag{4.9.9}$$

con $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ funciones diferenciables. Las derivadas de la solución particular propuesta están dadas por

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' + u_3' y_3 + u_3 y_3' \\ y_p'' &= u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' + u_2 y_2'' + u_3'' y_3 + 2u_3' y_3' + u_3 y_3'', \\ y_p''' &= u_1''' y_1 + 3u_1'' y_1' + 3u_1' y_1'' + u_1 y_1''' + u_2''' y_2 + 3u_2'' y_2' + 3u_2' y_2'' + u_2 y_2''' + \\ &\quad + u_3''' y_3 + 3u_3'' y_3' + 3u_3' y_3'' + u_3 y_3''' \end{aligned}$$

Al sustituir y_p y sus derivadas en la ecuación diferencial original, obtenemos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= y_p''' + a_2 y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p \\
&= (u_1''' y_1 + 3u_1'' y_1' + 3u_1' y_1'' + u_1 y_1''' + u_2''' y_2 + 3u_2'' y_2' + 3u_2' y_2'' + u_2 y_2''' + u_3''' y_3 + 3u_3'' y_3' + \\
&\quad +3u_3' y_3'' + u_3 y_3''') + a_2(u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' + u_2 y_2'' + u_3'' y_3 + 2u_3' y_3' + u_3 y_3'') + \\
&\quad +a_1(u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' + u_3' y_3 + u_3 y_3') + a_0(u_1 y_1 + u_2 y_2) \\
&= u_1(\underbrace{y_1''' + a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1}_{=0}) + u_2(\underbrace{y_2''' + a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2}_{=0}) + u_3(\underbrace{y_3''' + a_2 y_3'' + a_1 y_3' + a_0 y_3}_{=0}) \\
&\quad +(u_1''' y_1 + 3u_1'' y_1' + 3u_1' y_1'' + u_2''' y_2 + 3u_2'' y_2' + 3u_2' y_2'' + u_3''' y_3 + 3u_3'' y_3' + 3u_3' y_3'') \\
&\quad +a_2(u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' + u_3'' y_3 + 2u_3' y_3') + a_1(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) \\
&= \frac{d^2x}{d(^2} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + \frac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + (u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'') + \\
&\quad +a_2 \frac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + a_2(u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3') + a_1(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3).
\end{aligned}
$$

De nuevo, la ecuación anterior se reduce a una ecuación en tres variables

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d(^2} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + \frac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + (u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'') + \\
+a_2 \frac{d}{dx}(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) + a_2(u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3') + a_1(u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) &= f(x).
\end{aligned}
$$

Esta ecuación se simplifica al hacer los términos entre paréntesis iguales a cero:

$$
\begin{aligned}
u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 &= 0, \\
u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.9.10}
$$

Este supuesto, hace que la ecuación (4.9.10) se reduzca a

$$
u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' = 0. \tag{4.9.11}
$$

Juntando la información en (4.9.10) y (4.9.11), debemos hallar funciones u_1', u_2' y u_3' que satisfagan el sistema

$$
\begin{aligned}
u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 &= 0, \\
u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' &= 0, \\
u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' &= f(x),
\end{aligned}
\quad \text{o equivalentemente} \quad
\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.
$$

Resolvemos este sistema lineal por el método de Cramer. Definimos los determinantes

$$
W = W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix},
$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix}.$$

El método de Cramer nos dice que la solución del sistema anterior es

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}, \quad \text{y} \quad u_3' = \frac{W_3}{W}. \tag{4.9.12}$$

Al integrar las tres ecuaciones en (4.9.12) obtenemos las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$ y $u_3(x)$ requeridas.

En general, para una ecuación lineal de orden n en forma normal

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

las funciones coeficientes $u_1, \ldots, u_n$ en (4.9.3) se hallan resolviendo el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{4.9.13}$$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 4.9.1. Resolver la ecuación $y'' + y = \cot x$

Ejemplo 4.9.2. Resolver la ecuación $y'' + 4y = 3\csc x$

Ejemplo 4.9.3. Resolver la ecuación $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^x + e^{-x}$

Con el método de variación de parámetros, podemos resolver ecuaciones lineales con coeficientes no-constantes. Por ejemplo

Ejemplo 4.9.4. Para la ecuación $x^2y'' + xy' - y = 5xe^{-x}$,
(a) Verifique que $y_1 = x$ y $y_2 = 1/x$, son soluciones de la ecuación homogénea asociada en el intervalo $(0, \infty)$.
(b) Compruebe que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.
(c) Usando variación de parámetros, resuelva la ecuación no homogénea.

Ejemplo 4.9.5. Para la ecuación $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^{2x}$,
(a) Verifique que $y_1 = 1+x$ es solución de la ecuación homogénea asociada en el intervalo $(0, \infty)$.
(b) Construya una segunda solución y_2 de la ecuación homogénea usando la fórmula de reducción de orden. Compruebe que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.
(c) Usando variación de parámetros, resuelva la ecuación no homogénea.

4.10. Ecuaciones de Cauchy-Euler

En esta sección estudiamos una familia particular de ecuaciones lineales donde los coeficientes no son constante. Estas ecuaciones aparecen con frecuencia en problemas sobre ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En particular, suelen aparecen el fenómenos de transferencia de calor, potencial electrostático, entre otros. No veremos aquí tales aplicaciones. Sólo nos limitamos a desarrollar un método para resolver estas ecuaciones.

Una ecuación de Cauchy-Euler es una ecuación lineal de la forma

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = g(x), \tag{4.10.1}$$

donde los $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ son constantes, y las funciones que acompañan a las derivadas de y son potencias x^j de x (el exponente de x^j corresponde al orden de la derivada que acompaña).

Escribiendo la ecuación (4.10.1) en forma normal, obtenemos

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x}y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}}y'' + \frac{a_1}{x^{n-1}}y' + \frac{a_0}{x^n}y = f(x), \tag{4.10.2}$$

donde $f(x) = \frac{g(x)}{x^n}$. Claramente los coeficientes $\frac{a_j}{x^{n-j}}$ no están definidos en $x = 0$, de modo que el dominio de definición de la ecuación (4.10.1) es alguno de los intervalos $x < 0$ ó $x > 0$.

En lo que sigue, veremos un método para resolver una ecuación de Cauchy-Euler en el intervalo $(0, \infty)$.

4.10.1. Transformar a una ecuación con coeficientes constantes

Suponga que $x > 0$. El cambio de variable $t = \log x$ transforma la ecuación de Cauchy-Euler (4.10.1) en una ecuación lineal con coeficientes constantes. De hecho, observe que si $t = \log x$ (equivalentemente $x = e^t$), entonces $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$. Luego, las derivadas de y se transforman como

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \ \Rightarrow \boxed{xy' = \tfrac{dy}{dt}}. \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dt}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dt}\Big)\frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}, \ \Rightarrow \boxed{x^2y'' = \tfrac{d^2y}{dt^2} - \tfrac{dy}{dt}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) \\
&= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{-2}{x^3}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + \frac{1}{x^3}\Big(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\Big) = \frac{1}{x^3}\Big(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\Big) \\
&\quad \Rightarrow \boxed{x^3y''' = \tfrac{\partial^3 y}{\partial t^3} - 3\tfrac{d^2y}{dt^2} + 2\tfrac{dy}{dt}}.
\end{aligned}$$

De manera análoga, podemos continuar calculando las expresiones de la forma $x^jy^{(j)}$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Con este cambio, obtenemos una ecuación con coeficientes constantes. Y podemos resolver como ya vimos en las secciones anteriores.

Ejemplo 4.10.1. Resolver la ecuación $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Al hacer el cambio de variable $t = \log x$, tenemos que la ecuación se transforma en

$$\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big) + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

o equivalentemente $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. El polinomio característico de esta ecuación es $(D^2 - D - 6) = (D-3)(D+2)$, con raíces $m = -2$ y $m = 3$. Luego, la solución debe ser de la forma

$$y = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}.$$

Transformando de vuelta $x = e^t$, tenemos que $e^{-2t} = (e^t)^{-2} = x^{-2}$ y $e^{3t} = (e^t)^3 = x^3$. Así, la solución general de la ecuación resulta en

$$y = c_1x^{-2} + c_2x^3.$$

Así como en el ejemplo anterior, el cambio de variable $t = \log x$ (o $x = e^t$) proporciona un método general para resolver una ecuación de Cauchy-Euler de un modo más simple: Al transformar la ecuación en una con coeficientes constantes, proponemos soluciones para la ecuación homogénea como $y = e^{mt}$, donde m son las raíces del polinomio característico. Luego, al hacer el cambio de variable de vuelta, dichas soluciones se modifican a la forma $y = x^m$ (Véase el diagrama).

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{ecuación Cauchy-Euler en } x} \arrow[d, "t=\log x"'] & \boxed{\text{solución } y = x^m} \arrow[l] \\
\boxed{\text{ecuación coef. constantes en } t} \arrow[r] & \boxed{\text{solución } y = e^{mt}} \arrow[u, "x=e^t"']
\end{tikzcd}$$

En resumen, para resolver una ecuación de Cauchy-Euler homogénea, podemos ahorrarnos el cambio de variable proponiendo directamente soluciones de la forma $y = x^m$. Al sustituir esta solución y y sus derivadas en la ecuación diferencial, obtenemos un polinomi para m. Las raíces de este polinomio, son los posibles valores de m que resuelven la ecuación diferencial.

De nuevo, conviene hacer una separación atendiendo al tipo de raíces m obtenidas:

4.10.2. Raíces reales distintas

Pendiente...

4.10.3. Raíces reales repetidas

Pendiente...

Raíces complejas

Pendiente...