# Ecuaciones Diferenciales – Aula 04

Alan Gerardo Reyes Figueroa

diciembre 2016

## Índice



### 2.3. Análisis de signos

Continuamos nuestro estudio cualitativo de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. En esta aula abordamos un enfoque geométrico para el estudio de las ecuaciones diferenciales.

En la sección anterior estudiamos el problema de la existencia y unicidad de soluciones. Ahora, suponiendo que ya conocemos la región donde una ecuación diferencial tiene solución, queremos saber la forma de éstas soluciones, sin calcularlas explicitamente. Esto puede hacerse haciendo un análisis previo de la primera y segunda derivada de las soluciones.

Considere una ecuación de 1er. orden en forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1}$$

y suponga que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ es una solución para (2.1) en el intervalo $I$. Sabemos dónde la función $\varphi$ es creciente o decreciente, o donde tiene máximos y mínimos, por medio de la primera derivada $\varphi'(x)$; similarmente, sabemos dónde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, con la segunda derivada de $\varphi''(x)$. Como $\varphi$ es solución de (2.1), entonce satisface

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)).$$

Así, la primera derivada $\varphi'(x)$ está dada por el valor $f(x, \varphi(x))$. En otras palabras, la pendiente de una solución $\varphi$ que pasa por el punto $(x, y)$ está dado por el valor de $f(x, y)$. Resumimos en la siguiente tabla

| Signo de $f(x, y)$ | comportamiento de la solución $y(x)$ |
|---|---|
| $+$ | creciente |
| $-$ | decreciente |
| zero | máximo, mínimo, punto silla o solución constante |

Similarmente, la concavidad de la solución $\varphi$ está dada por la segunda derivada $\varphi''(x)$. En términos de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\big(f(x,y)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y).\end{aligned}$$

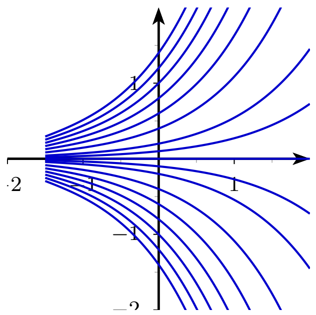
Así, la segunda derivada $\varphi''(x)$ está dada por el valor $f_x(x,\varphi(x)) + f(x,\varphi(x))f_y(x,\varphi(x))$, y la concavidad de una solución $\varphi$ que pasa por el punto $(x,y)$ está dado por $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y)$. Resumimos en la siguiente tabla

| Signo de $f_x + f_y f(x,y)$ | concavidad de la solución $y(x)$ |
|---|---|
| $+$ | cóncava hacia arriba |
| $-$ | cóncava hacia abajo |
| zero | punto de inflexión, máximo o mínimo |

**Ejemplo 2.1.** Considere la ecuación diferencial

$$y' = \lambda y, \quad \lambda > 0. \tag{2.2}$$

El teorema de existencia y unicidad vale en todo $\mathbb{R}^2$. Existe una única solución de (2.2) pasando por cada punto $(x,y)$ del plano. Haciendo un análisis de signos, tenemos que $f(x,y) = \lambda y > 0$ en los puntos donde $y > 0$ (pues $\lambda$ es positiva). Así, las soluciones de la ecuación (2.4) son crecientes en el semiplano superior, decreciente en el semiplano inferior, y se mantiene constante en $y = 0$ (el eje $x$).



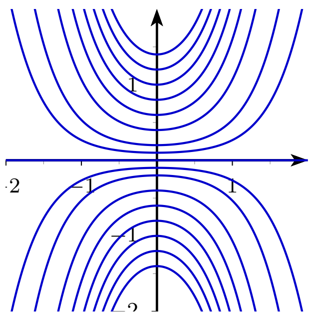
*Soluciones de $y' = \lambda y$, $\lambda = 1$.*

La segunda derivada es $\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\frac{dy}{dx} = \lambda^2 y$. El término $\lambda^2$ es siempre positivo, luego $y''$ es positiva cuando $y > 0$. Así las soluciones son cóncavas hacia arriba en los puntos $(x,y)$ del plano con $y > 0$ (semiplano superior), y son cóncavas hacia abajo en el semiplano inferior. Observe que las únicas soluciones de $y'' = 0$ son los puntos con $y = 0$. Como en esos puntos se cumple $y' = 0$ y $y'' = 0$, luego no son puntos de inflexión, y debemos esperar una solución constante en $y = 0$.

**Ejemplo 2.2.** Considere la ecuación diferencial

$$y' = xy. \tag{2.3}$$

El teorema de existencia y unicidad vale en todo $\mathbb{R}^2$. Existe una única solución de (2.3) pasando por cada punto $(x,y)$ del plano. Haciendo un análisis de signos, tenemos que $f(x,y) = xy > 0$ en los puntos donde $x > 0, y > 0$ o donde $x < 0, y < 0$. Así, las soluciones de la ecuación (2.3) son crecientes en el primero y tercer cuadrante. Similarmente, las soluciones son decrecientes en el segundo y cuarto cuadrante. En los puntos donde $xy = 0$, es decir el eje $x$ y el eje $y$ podemos esperar que las soluciones presenten máximos, mínimos o que haya alguna solución constante. Debe usarse el criterio de la segunda derivada para establecer que acontece en cada caso (verifique!).



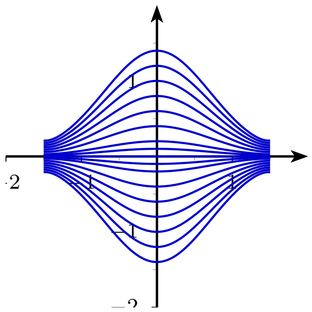
*Soluciones de $y' = xy$.*

La segunda derivada es $\frac{d^2y}{dx^2} = y + x(xy) = y(1+x^2)$. El término $1 + x^2$ es siempre positivo, luego $y''$ es positiva cuando $y > 0$. Así las soluciones son cóncavas hacia arriba en los puntos $(x, y)$ del plano con $y > 0$ (semiplano superior), y son cóncavas hacia abajo en el semiplano inferior. Observe que las únicas soluciones de $y'' = 0$ son los puntos con $y = 0$. De ahí que en los puntos de la forma $(0, y)$ (el eje $y$) las soluciones presentan máximos o mínimos. En los puntos de la forma $(x, 0)$ (eje $x$) se cumple $y' = 0$ y $y'' = 0$, luego no son puntos de inflexión, y debemos esperar una solución constante en $y = 0$.

**Ejemplo 2.3.** Considere la ecuación diferencial

$$y' = -xy. \tag{2.4}$$

El teorema de existencia y unicidad vale en todo $\mathbb{R}^2$. Ahora tenemos que $f(x, y) = -xy > 0$ es los puntos donde $x > 0, y < 0$ o donde $x < 0, y > 0$. Así, las soluciones de la ecuación (2.4) son crecientes en el segundo y tercer cuadrante, y son decrecientes en el primer y tercer cuadrante. En los puntos donde $-xy = 0$, la derivada vale 0.



*Soluciones de $y' = -xy$.*

La segunda derivada es $\frac{d^2y}{dx^2} = -y - x(-xy) = y(x^2 - 1)$. La segunda derivada se anula cuando $y = 0$ o cuando $x^2 = 1$. EN lo puntos donde $y = 0$ (eje $x$), no tenemos puntos críticos ni puntos de inflexión, sin una solución constante. Las soluciones tienen puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$. Por otro lado $y''$ es positiva en la región $y > 0$ y $|x| > 1$, también en la región $y < 0$, $|x| < 1$. En estos lugares las soluciones son cóncavas hacia arriba. Son cóncavas hacia abajo en las regiones donde $y > 0$, $|x| < 1$ y donde $y < 0$, $|x| > 1$.

## 2.4. Campos de direcciones

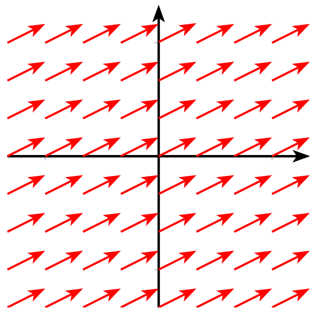
**Definición 2.4.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto del plano. Un *campo vectorial* en $U$ es una función $F : U \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big),$$

donde $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ son funciones reales. El dominio de un campo vectorial es el dominio común de sus funciones componentes. Decimos que el campo vectorial $F$ es de clase $C^k$ si las funciones componentes $f_1$ y $f_2$ son ambas de clase $C^k$.

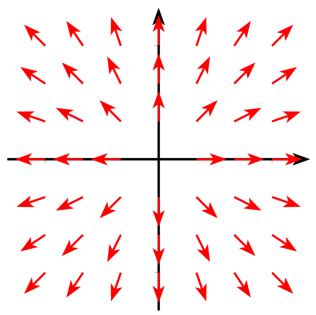
Podemos representar gráficamente un campo vectorial $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma. Sobre el punto con coordenadas $(x, y) \in U$, graficamos el vector correspondiente a su imagen $F(x, y)$. Esto es, trasladamos momentáneamente el origen al punto $(x, y)$, y en ese sistema de coordenadas, dibujamos el vector $F(x, y)$.

**Ejemplo 2.5.** El campo vectorial $F(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$



*Campo vectorial* $F(x,y) = (1, \frac{1}{2})$.

está definido en todo el plano $\mathbb{R}^2$. A cada punto $(x, y)$ del plano, le corresponde el vector constante $(1, \frac{1}{2})$. Observe en este caso que las funciones coordenadas son de clase $C^\infty$, y portanto $F$ es un campo vectorial de clase $C^\infty$.
Para obtener la representación gráfica, en cada punto del plano dibujamos un vector con coordenadas $(1, \frac{1}{2})$ (vea la figura). Podemos interpretar este campo vectorial como la dirección que sigue un flujo laminar que se mueve en forma rectilínea constante, con pendiente $\frac{1}{2}$.



*Campo vectorial* $G(x,y) = (1, \frac{1}{2})$.

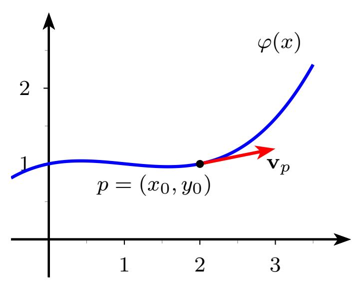
está definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, es decir en todos los puntos del plano excepto el origen. A cada punto $(x, y) \neq (0,0)$ del plano, le corresponde el vector unitario $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$. Observe en este caso que el dominio de las funciones coordenadas es justamente $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Este campo también es de clase $C^\infty$.
Podemos interpretar este campo vectorial como la dirección de un flujo que sale del origen y se mueve en forma recta hacia todas direcciones.

**Ejemplo 2.6.** El campo vectorial $G(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Dada una ecuación diferencial, nos gustaría construir un campo vectorial que nos indique la dirección que siguen las soluciones de dicha EDO. Recordemos que si la ecuación diferencial está escrita en la forma normal (2.1), entonces la derivada de cualquier curva solución $\varphi$ está dada por la función $f(x, y)$.

Por otro lado, recordemos de los cursos de cálculo que si tenemos una curva $\varphi$, una forma de obtener la dirección que sigue la curva en un punto $p = (x_0, y_0)$ es a través del vector $\mathbf{v}_p$ que es tangente a la curva en el punto $p$. La pendiente de este vector tangente coincide con la pendiente de la curva $\varphi$ en $p$.

Sigue que la pendiente del vector tangente a la curva solución $\varphi(x)$ en el punto $(x_0, y_0)$ debe ser $f(x_0, y_0)$ (vea la figura).



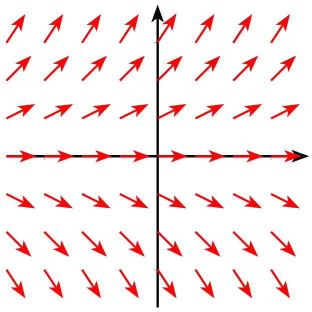

*Vector tangente a una solución.*

Dada la ecuación diferencial (2.1) definida en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, una forma de construir los vectores tangentes requeridos es por medio del campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}$ definido por

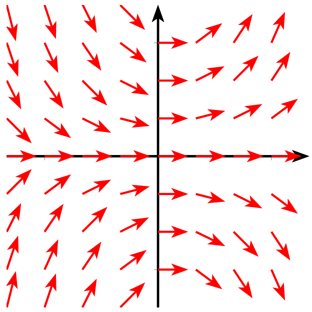
$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Este campo vectorial describe la dirección que siguen las soluciones de la ecuación (2.1).

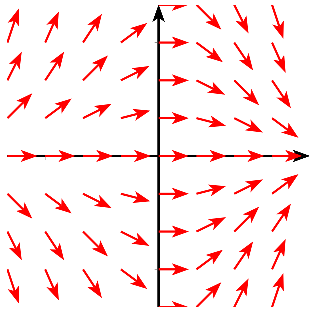
**Ejemplos 2.7.** Las ecuaciones de los ejemplos 2.1, 2.2 y 2.3 producen los siguientes campos vectoriales:



*Campo de $y' = \lambda y$, $\lambda = 1$*



*Campo de $y' = xy$*



*Campo de $y' = -xy$*

### 2.4.1. El método de las isoclinas

Pendiente...

## 2.5. Diagramas de fase de ecuaciones autónomas

Un *diagrama de fase* (o *retrato de fase*) de una ecuación diferencial es un retrato del comportamiento de sus soluciones. En esta sección indicamos como se construye un diagrama de fase para una familia particular de EDO's, que son las ecuaciones autónomas.

Una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

se llama *autónoma* cuando la función $f(x, y)$ no depende explícitamente de la variable independiente $x$. Esto es, cuando $\frac{df}{dx} = 0$. En otras palabras, la ecuación diferencial se ve en la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{2.6}$$

Si una EDO se ve como en 2.6, entonces la pendiente de sus trayectorias independe de $x$, y sólo depende de los valores de $y$. Así, el campo de vectores podrá verse como en la Figura 1, donde la pendiente del campo es la misma para los puntos que tienen la misma coordenada $y$.

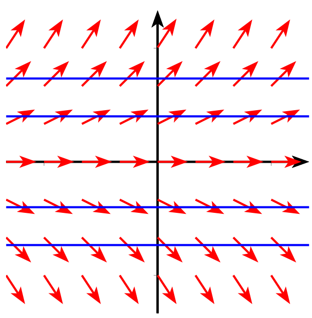


Figura 1: *Ecuación autónoma. El campo de direcciones tiene la misma pendiente a lo largo de cualquier recta horizontal.*

En el caso de ecuaciones autónomas, podemos hacer un análisis de signos en forma más simplificada. Como la fución $f(y)$ sólo depende de $y$, la derivada $\frac{dy}{dx}$ (y portanto la pendiente del campo de direcciones) sólo dependen de los valores de $y$.

Entonces podemos hacer un análisis de signos en forma de una tabla, e identificar la región de la recta en donde se cumplen las condiciones $f(y) = 0$, $f(y) > 0$ ó $f(y) < 0$.

Lo primero es identificar los *puntos de equilibrio*, o *soluciones de equilibrio* de la ecuación. Los puntos de equilibrio son los lugares donde $f(y) = 0$. En estos valores de $y$, la ecuación diferencial indica que la derivada $\frac{dy}{dx} = 0$, y portanto la EDO tendrá soluciones constantes.

Identificados los puntos de equilibrio, observe que éstos dividen la recta $\mathbb{R}$ en varios subintervalos abiertos. En ada uno de estos subinvertalos investigamos el signo que toma la función $f(y)$. Para ello, basta elegir un representante $y_i$ dentro de cada uno de estos intervalos y determinar el signo de $f(y_i)$. En la práctica, este procedimiento se hace haciendo una tabla de signos.

De igual manera, podemos hallar los *puntos de inflexión* resolviendo la ecuación

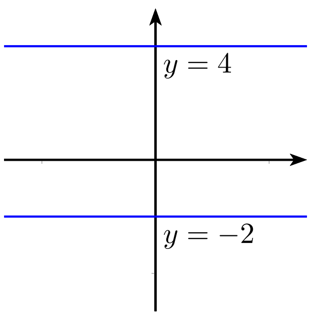
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = 0.$$

Estas raíces indicarán los lugares donde las soluciones de la ecuación diferencial tienen cambios en su concavidad.
Luego, se determinan las regiones de concavidad positiva y negativa mediante una tabla de signos.

La construcción del diagrama de fase se entenderá mejor con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.8.** Considere la ecuación diferencial

$$y' = (y+2)(y-4). \tag{2.7}$$



*Soluciones constantes de $y' = (y+2)(y-4)$.*

El teorema de existencia y unicidad vale en todo $\mathbb{R}^2$, luego existe solución única de (2.3) en cada punto del plano. Además la ecuación es autónoma: la variable independiente $x$ no aparece explícitamente en la ecuación.

En este caso $f(y) = (y+2)(y-4)$. Las soluciones de la ecuación $f(y) = 0$ son claramente $y = -2$ y $y = 4$. Sobre estas dos rectas, la ecuación (2.7) posee las soluciones constantes $y(x) = -2$ y $y(x) = 4$.

Los valores $y = -2$ y $y = 4$ dividen a la recta en los subintervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, y $(4, \infty)$. Hacemos una tabla de signos para estudiar $f(y)$ en estos intervalos:

| Intervalo | $y$ representante | Signo de $f(y)$ | comportamiento solución |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -2)$ | -5 | $+$ | creciente |
| $(-2, 4)$ | 0 | $-$ | decreciente |
| $(4, \infty)$ | 100 | $+$ | creciente |

Ahora podemos estudiar la concavidad. Hallamos las soluciones de la ecuación $y'' = \frac{df}{dy} f(x,y) = (2y-2)(y+2)(y-4) = 0$. $y = -2$ y $y = 4$ son soluciones, pero ya sabemos que éstas consisten

de soluciones constantes de la ecuación diferencial (2.7). La nueva información viene de la raíz $2y-2=0$, o sea $y=1$. Esto significa que sobre la recta $y(x)=1$, las soluciones de la EDO (2.7) poseen siempre puntos de inflexión.
De nuevo, los valores $y=-2$, $y=1$ y $y=4$ dividen a la recta en los subintervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$, $(1,4)$ y $(4,\infty)$. Hacemos una tabla de signos para estudiar la concavidad de $f(y)$ en estos intervalos:

| Intervalo | $y$ representante | Signo de $\frac{d^2y}{dx^2}(y)$ | concavidad solución |
|---|---|---|---|
| $(-\infty,-2)$ | -5 | $-$ | hacia abajo |
| $(-2,1)$ | -1 | $+$ | hacia arriba |
| $(1,4)$ | 0 | $-$ | hacia abajo |
| $(4,\infty)$ | 100 | $+$ | hacia arriba |

Con esta información, ya es posible hacer un esbozo muy acertado de las soluciones de la ecuación diferencial (2.7).

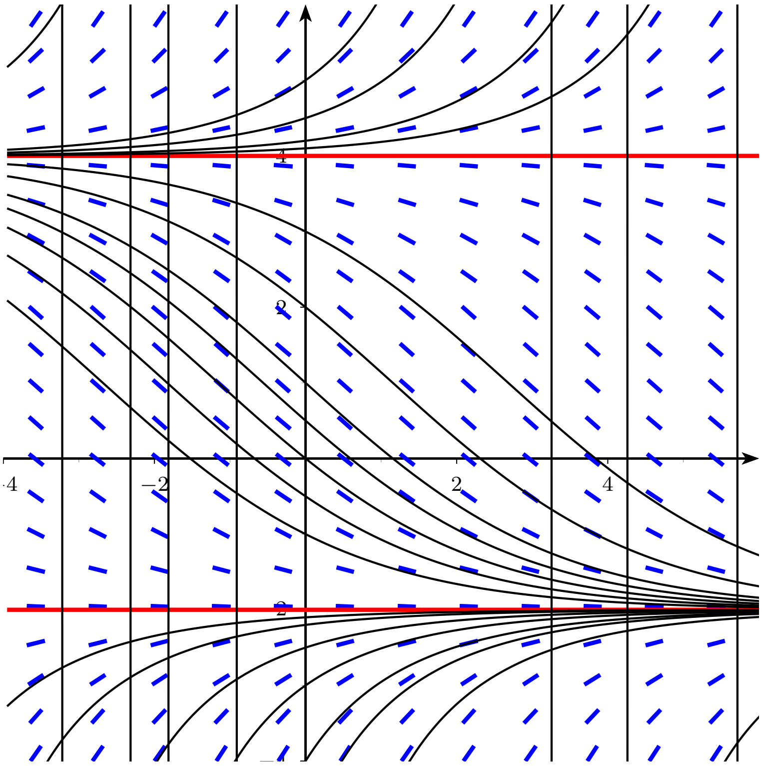



*Diagrama de fase asociado a la ecuación (2.7.)*