Modelación y Simulación 2024

Lab 07

10.octubre.2024

1. **(Modelo de Transporte)**
Tres centros de distribución envían automóviles a cinco concesionarios. El costo de envío depende de la distancia en millas entre los orígenes y los destinos, y es independiente de si el camión hace el viaje con cargas parciales o completas. La tabla siguiente resume la distancia en millas entre los centros de distribución y los concesionarios junto con las cifras de oferta y demanda mensuales dadas en número de automóviles. Una carga completa comprende 18 automóviles. El costo de transporte por milla de camión es de $25.

		Concesionario					
		1	2	3	4	5	Oferta
Centro	1	100	150	200	140	35	**400**
	2	50	70	60	65	80	**200**
	3	40	90	100	150	130	**150**
Demanda		**100**	**200**	**150**	**160**	**140**	

Figure 1: Distancia en millas, y oferta y demanda para el problema.

a) Formular el modelo de transporte.
b) Resolver el problema usando la librería JuMP.
Indique cuál es la distribución óptima, y el costo asociado.

2. (a) Asuma que en el problema anterior, el Concesionario 5 requiere 200 automóviles.
Formular y resolver el nuevo problema de transporte, comparando la solución con la del Problema 1.

(b) Asuma que en el problema anterior, el Centro 3 produce 200 automóviles.
Formular y resolver el nuevo problema de transporte, comparando la solución con la del Problema 1.

3. **(Modelo de Asignación)**
Resolver los modelos de asignación siguientes.

(i)

$3	$8	$2	$10	$3
$6	$5	$2	$7	$5
$6	$4	$2	$7	$5
$8	$4	$2	$3	$5
$7	$8	$6	$7	$7

(ii)

$3	$9	$2	$2	$7
$6	$1	$5	$6	$6
$9	$4	$7	$10	$3
$2	$5	$4	$2	$1
$9	$6	$2	$4	$6

En cada problema, indicar cuál tarea se le asigna a cada trabajador y el costo asociado a la asignación.

4. Implementar los siguientes métodos de descenso gradiente (naïve = tamaño de paso α constante):

   - descenso gradiente naïve con dirección de descenso aleatoria
   - descenso máximo naïve
   - descenso gradiente de Newton, con Hessiano aproximado
   - descenso grediente de Newton, con Hessiano exacto.

   En cada uno de los métodos, su función debe recibir los siguientes argumentos: la función objetivo f, el gradiente de la función objetivo df, el hessiano ddf (cuando sea necesario), un punto inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el tamaño de paso $\alpha > 0$, el número máximo de iteraciones $maxIter$, la tolerancia ε, así como un criterio de paro.

   Como resultado, sus algoritmos deben devolver: la mejor solución encontrada $\mathbf{x}$ (la última de las aproximaciones calculadas); la secuencia de iteraciones $\mathbf{x}_k$; la secuencia de valores $f(\mathbf{x}_k)$; la secuencia de errores en cada paso (según el error de su criterio de paro).
   Además, es deseable indicar el número de iteraciones efectuadas por el algoritmo, y si se obtuvo o no convergencia del método.

5. Testar sus algoritmos del Ejercicio 4 con las siguientes funciones:

   a) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + \tfrac{1}{2}y + 1.$$
   Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (-3, 1, -3, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (-1.01463, -1.04453)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = -1.51132$.

   b) La función de Rosembrock 2-dimensional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$
   Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (-1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

   c) La función de Rosembrock 10-dimensional $f : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}$, dada por
   $$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{9} 100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2.$$
   Punto inicial: $\mathbf{x}_0 = (-1.2, 1, 1, \ldots, 1, -1.2, 1)^T$, Óptimo: $\mathbf{x}^* = (1, 1, \ldots, 1)^T$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

   En cada uno de los casos, hallar un tamaño de paso α que garantice la convergencia de los métodos, y elabore una tabla con las primeras 3 y las últimas 3 aproximaciones $\mathbf{x}_k$ obtenidas.
   Incluir en la tabla:

   - la solución aproximada obtenida
   - el error de aproximación
   - la norma del gradiente en la solución

   Elabore gráficas que muestren el error de aproximación, en función del número de iteración, y muestre la comparación de la evolución de la convergencia en sus cuatro métodos. A partir de estas gráficas, discuta cuál de los métodos es más efectivo, en cada caso. De ser posible, en el caso de funciones 2-dimensionales, incluya una gráfica de la trayectoria de puntos generada por sus algoritmos.

6. Construya una función "suma de gaussianas" 2-dimensional, en la forma
   $$f(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{k} \exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma}||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||_2^2\right),$$

donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son puntos en el rectángulo $[0,8] \times [0,8]$ elegidos de forma aleatoria (distribución uniforme). Use $k = 8$, Aquí, $\sigma > 0$ es un parámetro de escala definido por el usuario.

Estos puntos se generan de forma aleatoria, pero una vez elegidos, se congelan para que la función f quede fija.

Aplique varias veces alguno de los métodos implementados a la función f, con inicializaciones $\mathbf{x}_0$ distintas, de forma que se puedan obtener los diferentes mínimos locales de la función.

Muestre visualizaciones de diferentes secuencias de aproximaciones $\{\mathbf{x}_k\}$ convergiendo a cada uno de los mínimos locales de su función.