Modelación y Simulación 2024

Lab 03

08.agosto.2024

1. Implementar los algoritmos de Runge-Kutta (de orden 4) para resolver una EDO, y para resolver un sistema de EDO. Estos algoritmos se usarán en los siguientes problemas.

2. Dos poblaciones de animales $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0.2x - 0.005xy, \\ y'(t) &= -0.5y + 0.01xy. \end{aligned}$$

   Aquí, la escala de tiempo se mide en meses.

   Nos interesa la trayectoria y el campo de direcciones que este sistema forma en el primer cuadrante del plano xy (ya que $x(t)$, $y(t)$ som ambas cantidades de individuos, sólo tiene sentido cuando estas son cantidades no-negativas). Resolver los siguiente:

   a) Grafique el campo vectorial o plano de fase asociado a ese sistema de EDO.
   b) Usando algoritmos computacionales, encuentre todos los puntos de equilibro del sistema de EDO (sólo los que están en el primero cuadrante, incluyendo los ejes y el origen). y clasificarlos de acuerdo a su comportamiento. Explique cualitativamente cómo se comportan las soluciones cerca del punto de equilibrio obtenido.
   c) Resuelva el sistema de EDO, con su algoritmo de Runge-Kutta, para la condición inicial

   $$x(0) = 70, \qquad y(0) = 30.$$

   Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población x y y después de 5 años. Aproxime cuál es el valor del período o ciclo de repetición de las poblaciones.
   d) Repita la solución deel sistema de EDO, esta vez para la condición inicial

   $$x(0) = 100, \qquad y(0) = 10.$$

   Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población para las especies x y y después de 5 años. Aproxime cuál es el valor del período o ciclo de repetición de las poblaciones.
   e) Grafique ambas trayectorias obtenidas en su plano de fase xy (encima del campo vectorial). Ilustre en la gráfica el valor de la población inicial y final (a los 5 años) en cada caso.
   f) Explique o describa cualitativamente el comportamiento del sistema de poblaciones.

3. Suponga ahora que que las poblaciones de dos especies $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el sistema de EDO:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0.5x - 0.001x^2 - xy, \\ y'(t) &= -0.2y + 0.1xy. \end{aligned}$$

   La escala de tiempo de nuevo se mide en meses.

   Nos interesa la trayectoria y el campo de direcciones que este sistema forma en el primer cuadrante del plano xy (ya que $x(t)$, $y(t)$ som ambas cantidades de individuos, sólo tiene sentido cuando estas son cantidades no-negativas). Resolver los siguiente:

   a) Grafique el campo vectorial o plano de fase asociado a ese sistema de EDO.

b) Usando algoritmos computacionales, encuentre todos los puntos de equilibro del sistema de EDO (sólo los que están en el primero cuadrante, incluyendo los ejes y el origen). y clasificarlos de acuerdo a su comportamiento. Explique cualitativamente cómo se comportan las soluciones cerca del punto de equilibro obtenido.

c) Resuelva el sistema de EDO, con su algoritmo de Runge-Kutta, para la condición inicial

$$x(0) = 10, \qquad y(0) = 10.$$

Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población x y y después de 5 años.

d) Grafique la trayectoria obtenidas en su plano de fase xy (encima del campo vectorial). Ilustre en la gráfica el valor de la población inicial y final (a los 5 años) en cada caso.

e) Explique o describa cualitativamente el comportamiento del sistema de poblaciones.

4. El cometa Halley alcanzó el último perihelio (su punto de acercamiento más cercano al Sol, el Sol en el origen) el 9 de febrero de 1986. Sus componentes de posición y velocidad en ese momento fueron

$$\mathbf{p}_0 = (0.325514, -0.459460, 0.166229), \qquad \mathbf{v}_0 = (-9.096111, -6.916686, -1.305721),$$

respectivamente. Aquí la posición se mide en UA (unidades astronómicas), en las cuales la unidad de distancia corresponde al semi-eje mayor del planeta Tierra, y el tiempo se mide en años. El vector $\mathbf{p}(t)$ describe la posición $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del cometa.

Las ecuaciones de movimiento del cometa son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

donde

$$\mu = 4\pi^2 \qquad \text{y} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

a) Resolver las ecuaciones mediante algoritmos numéricos. Graficar las proyeccciones xy, xz y yz de la trayectoria del cometa (si lo desea, puede graficar una trayectoria completa del cometa mediante una gráfica 3D).

b) Estimar la posición y velocidad del comenta para el 9 de febrero de 2086, y de 2186. ($t = 100$ y 200 años).

c) Elaborar una gráfica de t contra $r(t)$ y estimar el período de repetición de los ciclos del cometa.