

Métodos Numéricos II 2025

Primer Proyecto

02.septiembre.2025

Segmentación Espectral (Spectral Clustering).

En este proyecto vamos a implementar un método para binarizar (segmentar en dos componentes) una imagen RGB.

A partir de una imagen a colores (por ejemplo, en formato RGB), en general la segmentación consiste en clasificar cada píxel de la imagen en k grupos, atendiendo a características comunes como color, textura y posición espacial. En particular, la segmentación binaria consiste en clasificar los píxeles en dos grupos: 0 = fondo (*background*), y 1 = objeto de interés (*foreground*). Una técnica para segmentación binaria consiste en la segmentación espectral.

Dada la imagen I de $h \times w$ píxeles (h = número de filas o altura de la imagen, w = número de columnas o ancho de la imagen), el método de segmentación espectral construye un grafo G con hw vértices, uno por cada píxel de la imagen.

Cada píxel es conectado con sus cuatro vecinos (norte, sur, este y oeste), y las aristas de conexión se ponderan de acuerdo a la similitud de los píxeles vecinos que se unen, mediante alguna métrica de afinidad. Por ejemplo, una de las métricas de afinidad más comunes se construye mediante un kernel gaussiano

$$\text{similarity}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\alpha \|color(i) - color(j)\| + \beta \|position(i) - position(j)\|) \right).$$

Aquí, $color(i)$ y $color(j)$ corresponden al vector de colores RGB de los píxeles $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_j$, respectivamente. Similarmente, $position(i)$ y $position(j)$ son las coordenadas (x, y) de los píxeles $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}_j$, en la matriz $h \times w$ que almacena la imagen I .

Así, $\|color(i) - color(j)\|$ mide la distancia de color entre los píxeles i y j , mientras que $\|position(i) - position(j)\|$ mide la distancia espacial entre estos píxeles. $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son coeficientes o parámetros que ponderan la diferencia de color y de distancia espacial, y $\sigma > 0$ es un parámetro de escala dependiendo de la imagen.

1. El primer paso de la segmentación espectral es construir una matriz de afinidad W , que representa al grafo de conexiones G , pesado mediante la métrica de afinidad anterior. Esta matriz $W \in \mathbb{R}^{hw \times hw}$ es simétrica, y usualmente es de dimensiones muy grandes, con pocas conexiones. Así que W se trabaja como una matriz rara.
2. Construida la matriz de afinidad $W = (w_{ij})$, se construye la matriz Laplaciana del grafo G . Para ello, en cada fila de la matriz W se calcula

$$d_i = \sum_{j=1}^{hw} w_{ij}.$$

Esto es, d_i es la suma de afinidades en la fila i (d_i se llama usualmente el **grado** del vértice i). Luego, se construye la matriz diagonal

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_{hw}).$$

El Laplaciano del grafo G se define como la matriz

$$L = W - D.$$

Sin embargo, en lugar de L , se utiliza el llamado *Laplaciano normalizado* de G , definido como

$$\mathcal{L} = D^{-1/2} L D^{-1/2} = D^{-1/2} (W - D) D^{-1/2}.$$

3. Con el Laplaciano normalizado $\mathcal{L}$, calculamos el autovector asociado al segundo menor autovalor de $\mathcal{L}$ (el menor autovalor siempre es 0). Este autovalor $\mathbf{v}_{n-1}$ es llamado el **vector de Fiedler**.
4. Finalmente, los signos del vector de Fiedler $\mathbf{v}$ producen la segmentación binaria requerida. Esto es, si la i -ésima entrada v_i del vector de Fiedler satisface $v_i > 0$, el píxel i de la imagen se asigna al grupo 1, mientras que si $v_i < 0$, el píxel i se asigna al grupo 0. Esto se hace para cada uno de los píxeles de la imagen. Al final de este paso, se obtiene una segmentación *background-foreground* de la imagen I .



Su trabajo consiste en implementar un método que haga una segmentación espectral a partir de la matriz de afinidad W .

- A partir de la imagen de entrada I de tamaño $h \times w$, construir el grafo de píxeles G de tamaño $hw \times hw$. Este debe ser representado por una matriz rara con 4 diagonales.
- Usando una métrica de similaridad con kernel gaussiano, construir una matriz de afinidad W , también en formato sparse.
- Calcular la laplaciana L y la laplaciana normalizada $\mathcal{L}$ en formato sparse.
- Hallar el segundo menor autovalor de $\mathcal{L}$ y su vector de Fiedler $\mathbf{v}$.
- Calcular los signos de las entradas de $\mathbf{v}$ y construir una máscara binaria en función de estos signos.
- Mostra la imagen original, y su segmentación binaria respectiva.

Repetir esto para las diferentes imágenes.

Material de consulta:

http://www.tml.cs.uni-tuebingen.de/team/luxburg/publications/Luxburg07_tutorial.pdf

<https://ranger.uta.edu/~chqding/Spectral/>
