# Métodos Numéricos II 2025

Lista 03

21.agosto.2025

1. Implemente funciones en Python que, dada una matriz $A$, calculen las siguientes descomposiciones (una función diferente para cada descomposición):

   a) $PA = LU$,

   b) Cholesky,

   c) $QR$.

   En cada caso, la función debe recibir como único argumento la matriz a factorar, y debe devolver cada una de las matrices componentes de la factoración.

   Su algoritmo debe incluir una evaluación de condiciones necesarias sobre la matriz A e indicar mensajes cuando la factoración deseada no sea posible. (Sugerencia: por ejemplo, para evaluar si una matriz $A$ es positiva definida, pueden implementar una función que calcule los autovalores de $A$ y devuelva True/False según sean todos positivos o no.)

   Utilizar las funciones anteriores para obtener las descomposiciones $LU$, $PA = LU$, $LL^T$ y $QR$ (en caso existan), para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Implementar algoritmos para los métodos de Jacobi, Seidel, JOR y SOR (de nuevo, una función para cada uno), para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En este caso, además de la información del sistema, cada función debe recibir como argumento un vector $\mathbf{x}_0$ como punto inicial, una tolerancia máxima $\varepsilon > 0$ para el criterio de paro, un número máximo de iteraciones `maxI`, y cuando sea necesario el parámetro de sobrerrelajación $\omega$.

   Resuelva el sistema tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

   donde $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$, $\mathbf{xb} \in \mathbb{R}^{100}$.

   Compare los cuatro algoritmos en términos de rapidez de convergencia, y en términos de error respecto a la solución exacta $\mathbf{x}^* = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Para los métodos JOR y SOR, use valores de $\omega$ adecuados que aceleren la convergencia de los métodos.

3. Implementar el método de las potencias y el método $QR$, para calcular todos los autovalores y autovectores de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Aplicarlo a las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

En cada una las matrices, elabore una gráfica del error de convergencia $||\ell_k - \ell_{k-1}||$, en función del número de iteración $k$, donde $\ell$ es el vector que contiene a los autovalores de la matriz.

Comparar ambos método y discutir cuál tiene mejor desempeño.

4. Leer el ejemplo 7.6.1 (páginas 559-566) de libro de C. Meyer *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*.

Aplicar el método $QR$ anterior, para calcular todos los autovalores de una matriz tridiagonal $A$ como en la ecuación (7.6.2), de tamaño $1000 \times 1000$ (esta matriz resultaría al hacer un mallado con 1000 nodos para resolver el sistema de EDO (7.6.2) de forma numérica).

A partir de éstos, hallar y graficar los diez primeros modos de vibración de la viga (Figura 7.6.3). Por simplicidad, asuma $T = mL$. Elabore una tabla que relacione cada autovalor $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, con su respectiva frecuencia de vibración y el período de oscilación correspondiente a los primeros 10 modos de vibración.