

Métodos Numéricos II 2025

Lista 02

31.julio.2025

1. Implementar un algoritmo para compresión de imágenes usando la SVD. Su algoritmo debe estar preparado tanto para comprimir imágenes en escala de grises, como imágenes en formato de color. El usuario debe tener la opción de pasar los siguientes argumentos:

- la imagen de entrada,
- el tamaño de los bloques $b \times b$,
- el número de componentes k a utilizar en la compresión.

Redactar un informe técnico en el formato indicado, en el cuál deben desarrollar su solución de la implementación. Desarrollar al menos dos ejemplos con diferentes imágenes. Para cada imagen

- a) Calcular diferentes compresiones cambiando los parámetros b ó k . Indique las tasas de compresión obtenidas y los tiempos de cómputo.
 - b) ¿Cuál es el efecto sobre la compresión, al variar b y mantener el número de componentes? Mostrar evidencia de este efecto.
 - c) ¿Cuál es el efecto sobre la compresión, al variar k y mantener el tamaño de los bloques? Mostrar evidencia de este efecto.
 - d) Discutir los resultados obtenidos.
2. Derivado de la lectura de las presentaciones Aula05, Aula06 y las lecturas 13 a 15 del libro de Trefethen-Bau, responder lo que se pide a continuación.
 - a) Explique con sus palabras y elabore una imagen o diagrama para apoyar su explicación, qué es un problema bien condicionado y cómo se diferencia de un problema mal condicionado. Ilustre con un ejemplo de cada uno.
 - b) Explique qué es el número de condición absoluta, y qué es el número de condición relativa. ¿Qué es lo que está midiendo cada una de estas cantidad? Explique mediante un ejemplo qué es lo que mide cada una de estas cantidades.
 - c) Explique los siguientes conceptos:
 - ε de maquina,
 - algoritmo preciso,
 - algoritmo estable,
 - algoritmo estable hacia atrás.Añada un ejemplo de cada uno en su explicación.

3. Es muy común que para un sistema lineal $Ax = b$ se indique que el número de condición del sistema es

$$\kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

¿Hay alguna diferencia si este número de condición se calcula usando la norma 1, la norma 2 o la norma de Frobenius? Discuta este punto.

4. Calcule el número de condición de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 420 & 210 & 140 & 105 \\ 210 & 140 & 105 & 84 \\ 140 & 105 & 84 & 70 \\ 1105 & 84 & 70 & 60 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

¿Qué implica esto sobre la solución de los sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

¿Qué ocurre en el caso de los sistemas

$$B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

5. La matriz de Pascal de orden n es la matriz S_n de $n \times n$ cuyas entradas están dadas por $s_{ij}^{(n)} = \binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j}$, para $0 \leq i, j < n$. Por ejemplo, las primeras matrices de Pascal son

$$S_1 = (1), \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Implementar algoritmos y calcular el determinante de S_n , de forma computacional, mediante los siguientes métodos:

- cofactores,
- eliminación gaussiana,

para matrices de tamaño $m = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, \dots, 100, 200, 300, \dots, 1000, \dots$ (hasta donde su máquina aguante).

En cada algoritmo, hacer una gráfica que estime el tiempo de ejecución del cálculo del determinante. Compare en una sola gráfica los tiempos de ejecución. Explique sus resultados y llega a alguna conclusión de interés.

6. Repita el ejercicio anterior, pero ahora para calcular la inversa de la matriz S_n . Implementar algoritmos y calcular el determinante de S_n , de forma computacional, mediante los siguientes métodos:

- cofactores,
- eliminación gaussiana,

para matrices de tamaño $m = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, \dots, 100, 200, 300, \dots, 1000, \dots$ (hasta donde su máquina aguante).

En cada algoritmo, hacer una gráfica que estime el tiempo de ejecución del cálculo de la inversa. Compare en una sola gráfica los tiempos de ejecución. Explique sus resultados y llega a alguna conclusión de interés.