Métodos Numéricos II 2025

Lista 01

15.julio.2025

1. Determinar si las siguientes matrices admiten una descomposición espectral $Q\Lambda Q^1$. En caso afirmativo, hallar su descomposición. En caso negativo, proporcionar un argumento para mostrar que no es posible.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. a) Mostrar que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, entonces $||A||_2^2 = ||\mathbf{u}||_2^2 ||\mathbf{v}||_2^2$.
   b) ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o dé un contraejemplo.

3. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz con $m \geq n$, cuya descomposición SVD es dada por $A = U\Sigma V^T$. Probar lo siguiente:
   a) $A\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.
   b) $A^T\mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Puede usar funciones de Python para verificar y comparar su resultado (sólo para verificar).

5. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:
   a) $\operatorname{rank}(B)$.
   b) $\operatorname{Ker}(B)$.
   c) $\operatorname{Im}(B)$.
   d) $||B||_2$ y $||B||_F$.

6. En este ejercicio vamos a calcular normas matriciales inducidas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular las normas inducidas $||A||_1$, $||A||_2$ y $||A||_\infty$, usando las estrategias vistas en clase.

b) Implementar un algoritmo para aproximar cualquier norma $||A||_p$, $p \geq 1$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, usando muestras aleatorias sobre la esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, y calculando el máximo sobre la muestra.

   Aquí la idea es tomar una muestra $\mathbf{x}_i$ de N de vectores unitarios, calcular el máximo $m_i = max_i||A\mathbf{x}_i||_p$. Este experimento se repite un total de K veces. Al final, el resultado devuelto es el mayor de estos máximos:

   $$\text{aproximación de } ||A||_p = max_{1\leq j\leq K} m_j.$$

   Su algoritmo debe permitir ingresar como argumentos, la matriz A, la norma $p \geq 1$, y los parámetros N y K.

c) A partir del algoritmo desarrollado, aproximar el valor de $||A||_3$ y $||A||_4$, $||A||_{100}$ y $||A||_{1.5}$.

d) ¿Qué ocurre a cuando $p \to 1^+$? ¿Y cuando $p \to \infty$? Explicar.