

DESCENSO GRADIENTE DE NEWTON

ALAN REYES-FIGUEROA
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 26) 21.OCTUBRE.2025

Descenso Gradiente

Otra dirección de búsqueda importante es la **dirección de Newton**. Ésta se deriva de la aproximación de Taylor de segundo orden

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T D^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + o(\|\mathbf{d}\|^2). \\ &\approx \underbrace{f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T D^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}}_{m_k(\mathbf{d})}. \end{aligned} \quad (1)$$

Observe que $m_k(\mathbf{d})$ es una función cuadrática en \mathbb{R}^n . Si $D^2 f(\mathbf{x}_k)$ es positiva definida, entonces m_k es convexa, y encontramos la dirección de Newton hallando el vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ como el mínimo global de esta función cuadrática. Esto es

$$\nabla m_k(\mathbf{d}) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + D^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = \mathbf{0} \implies \mathbf{d}_{\text{Newton}} = -(D^2 f(\mathbf{x}_k))^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

- Podemos usar la dirección de Newton en un método de descenso gradiente siempre que $D^2 f \succ 0$.
- Usamos tamaño de paso $\alpha = 1$ con la dirección de Newton. Sin embargo, α puede ajustarse cuando los resultados no son satisfactorios.

Descenso Gradiente

Algoritmo: (*Descenso gradiente, versión Newton*)

Inputs: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C^2 , con Hessiana D^2f positiva definida en cada punto; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_k > 0$ tamaño de paso (usualmente $\alpha_k = 1$).

Outputs: \mathbf{x} punto crítico de f .

For $k = 0, 1, 2, \dots$ hasta que se cumpla un criterio de paro:

Define $\mathbf{d}_k = -(D^2f(\mathbf{x}_k))^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$,

Set $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Return \mathbf{x}_{k+1} .

Obs:

- Cuando $D^2f(\mathbf{x}_k)$ no es positiva definida en alguno de los puntos iterados \mathbf{x}_k , el método aún se puede utilizar. En este caso, se reemplaza el hessiano por su aproximación simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, más cercana, que sea positiva definida.
- Esto puede hacerse hallando la descomposición espectral $D^2f(\mathbf{x}_k) = U \Lambda U^T$, y reemplazando todos los autovalores negativos de Λ por $\varepsilon > 0$; $A = U \Lambda_\varepsilon U^T$.

Descenso Gradiente

Algoritmo: (isPSD, is Positive Definite?)

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz simétrica, $\varepsilon > 0$ un número muy cercano a 0 (e.g. $\varepsilon = 10^{-6}$).

Outputs: True or False, dependiendo de si A es positiva definida.

Get all eigenvector λ_i of A .

If all $\lambda_i > \varepsilon$: return True.

Else: return False.

Algoritmo: (nearPSD, Aproximación Positiva Definida)

Inputs: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz simétrica, $\varepsilon > 0$ un número muy cercano a 0 (e.g. $\varepsilon = 10^{-6}$).

Outputs: A^+ , la matriz positiva definida más cercana a A .

If $\text{isPSD}(A) = \text{True}$: return A .

Get $U \Lambda U^T$ the spectral decomposition of A .

$\Lambda^+ = \Lambda.\text{copy}()$

$\Lambda^+[\Lambda^+ < \varepsilon] = \varepsilon$. (sustituir los valores λ_i negativos ó 0 por ε)

Reconstruct $A^+ = U \Lambda^+ U^T$

Return A^+ .

Descenso Gradiente

Otra alternativa para aproximar la dirección de búsqueda, es hacer uso de una la siguiente aproximación de Taylor de primer orden, sobre el gradiente de f :

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) &= \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha D^2 f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + o(\|\mathbf{d}_k\|). \\ &\approx \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha D^2 f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k.\end{aligned}\tag{2}$$

Queremos hallar el valor de α que minimiza el valor para $f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$. Para ello, hacemos $\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) = \mathbf{0}$. (Observe que esto funciona si $D^2 f(\mathbf{x}_k)$ es positiva definida).

Luego, $\mathbf{0} = \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha D^2 f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k$. Multiplicando esta ecuación por $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T$ de ambos lados, obtenemos:

$$\mathbf{0} = \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \nabla f(\mathbf{x}_k) + \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^T D^2 f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k.$$

Sustituyendo $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x})_k$ y despejando α de la ecuación resultante, obtenemos

$$\alpha_k = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \nabla f(\mathbf{x}_k)}{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T D^2 f(\mathbf{x}_k) \nabla f(\mathbf{x}_k)}.\tag{3}$$

Descenso Gradiente

La ecuación (3) usa la información del Hessiano para elegir el tamaño de paso α_k que debemos movernos.

Algoritmo: (*Descenso gradiente, versión Hessiano aproximado*)

Inputs: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ función de clase C^2 , con Hessiana D^2f positiva definida en cada punto; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Outputs: \mathbf{x} punto crítico de f .

For $k = 0, 1, 2, \dots$ hasta que se cumpla un criterio de paro:

Define $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$,

Compute α_k using equation (3)

$$\alpha_k = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \nabla f(\mathbf{x}_k)}{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T D^2 f(\mathbf{x}_k) \nabla f(\mathbf{x}_k)}.$$

Set $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Return \mathbf{x}_{k+1} .

Obs: Si $D^2f(\mathbf{x}_k)$ no es positiva definida, sustituimos por la aproximación positiva definida más cercana.

Descenso Gradiente

- El cálculo de la hessiana $D^2f(\mathbf{x}_k)$ en cada iteración, consume mucho costo computacional (sobre todo en altas dimensiones).

Existen otros métodos de tipo gradiente que, en lugar de calcular exactamente el hessiano $D^2f(\mathbf{x}_k)$, utilizan una aproximación B_k , que se actualiza en cada paso.

De la aproximación de Taylor

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) &= \nabla f(\mathbf{x}_k) + \int_0^1 D^2f(\mathbf{x}_k + t\mathbf{d}) \mathbf{d} dt \\ &= \nabla f(\mathbf{x}_k) + D^2f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \underbrace{\int_0^1 [D^2f(\mathbf{x}_k + t\mathbf{d}) - D^2f(\mathbf{x}_k)] \mathbf{d} dt}_{o(||\mathbf{d}||)}.\end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{d} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) = \nabla f(\mathbf{x}_k) + D^2f(\mathbf{x}_k) (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + o(||\mathbf{d}||)$.
Cuando $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ están en una región cercana al mínimo \mathbf{x}^* , donde $D^2f(\mathbf{x}_k) \succ 0$, resulta

$$D^2f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} \approx \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (4)$$

Descenso Gradiente

Así, elegimos la aproximación de B_{k+1} de modo que imite la propiedad (4) anterior. Así, requerimos que B_{k+1} cumpla la **ecuación secante**:

$$B_{k+1}\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k, \quad (5)$$

donde $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, y $\mathbf{y}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$. Además, requerimos que B_{k+1} sea simétrica, y que la diferencia $B_{k+1} - B_k$ sea de bajo rango.

Estos son los métodos llamados **métodos quasi-Newton**. Dos de las fórmulas más populares para actualizar el hessiano son

- el método **simétrico de rango 1 (SR1)**:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\mathbf{y}_k - B_k\mathbf{s}_k)(\mathbf{y}_k - B_k\mathbf{s}_k)^T}{(\mathbf{y}_k - B_k\mathbf{s}_k)^T\mathbf{s}_k}.$$

- el método **BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)**:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^T B_k^T}{\mathbf{s}_k^T B_k \mathbf{s}_k} + \frac{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}.$$