

# **FUNCIONES CONVEXAS**

ALAN REYES-FIGUEROA  
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 23) 09.OCTUBRE.2025

# Funciones Convexas

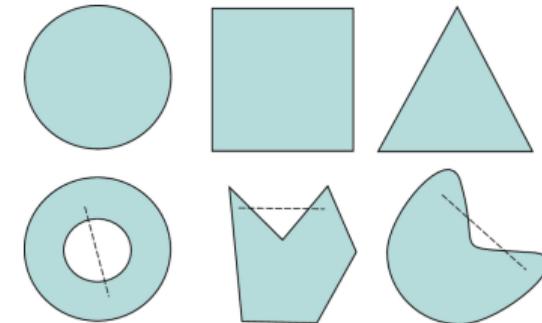
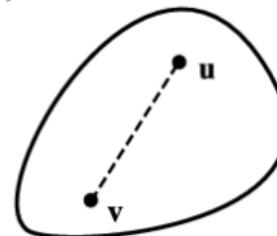
## Definición

Un subconjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es **convexo** si para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ , el segmento de recta  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{(1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \in [0, 1]\}$  está totalmente contenido en  $\Omega$ .

a) b)



b)



(a) Conjunto no convexo, (b) Conjunto convexo.

## Ejemplos:

- Convexos: esferas, hiperplanos, semiespacios, conos, ...
- No Convexos: conjunto no conexos, uniones de rectas, uniones en general, ...

# Funciones Convexas

## Definición

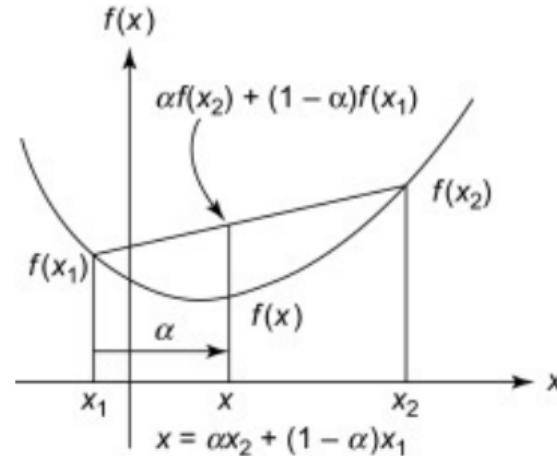
Una función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **convexa** si  $\Omega = \text{dom } f$  es un conjunto convexo, y para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ , y todo  $t \in [0, 1]$  vale

$$f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}). \quad (1)$$

Geométricamente, la desigualdad (1) significa que el segmento de recta entre  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  y  $(\mathbf{y}, f(\mathbf{y}))$  está por encima de la gráfica de  $f$ .

La función  $f$  es **estrictamente convexa** si en (1) vale la desigualdad estricta, siempre que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  y  $t \neq 0, 1$ . Decimos que  $f$  es **cóncava** (**estrictamente cóncava**) si  $-f$  es convexa (estrictamente convexa).

A la desigualdad (1) se le llama usualmente **desigualdad de Jensen**.



# Funciones Convexas

## Propiedad

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  conjunto convexo. La función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa  $\iff$  para todo  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \Omega$ , y cualesquiera  $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ , con  $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ , se tiene que

$$f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i). \quad (2)$$

Prueba: ( $\Leftarrow$ ) Para  $k = 2$ , tome  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{y} \in \Omega$ , y sean  $t_1 = 1 - t, t_2 = t$ , con  $t \in [0, 1]$ . La desigualdad (2) se reduce a  $f((1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1 - t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y})$ , lo que implica que  $f$  es convexa.

( $\Rightarrow$ ) Mostramos la desigualdad (2) por inducción sobre  $k$ .

Para  $k = 1$ , necesariamente  $t_1 = 1$  de modo que  $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_1)$  y (2) se cumple de manera automática. El caso  $k = 2$  se cumple a partir de la definición de convexidad (1).

Suponga que (2) se cumple para cualesquiera  $k$  puntos  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in \Omega$ , siempre que se forme una combinación lineal convexa  $s_1\mathbf{p}_1 + \dots + s_k\mathbf{p}_k$ , con  $0 \leq s_i \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^k s_i = 1$ .

# Funciones Convexas

Suponga ahora que  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} \in \Omega$ , se combinan para formar un punto

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{x}_1 + t_2 \mathbf{x}_2 + \dots + t_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1.$$

Definamos  $t = t_{k+1}$ ,  $1 - t = \sum_{j=1}^k t_j = t_1 + \dots + t_k$ . Ambos coeficientes satisfacen  $0 \leq t, 1 - t \leq 1$ . En particular, si  $\mathbf{p} = \sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j \in \Omega$ , con  $\sum_{j=1}^k s_j = 1$ , podemos escribir

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{x}_{k+1} = (1 - t) \sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j + t_{k+1} \quad \Rightarrow \quad t_j = (1 - t)s_j, \quad j = 1, \dots, k;$$

y

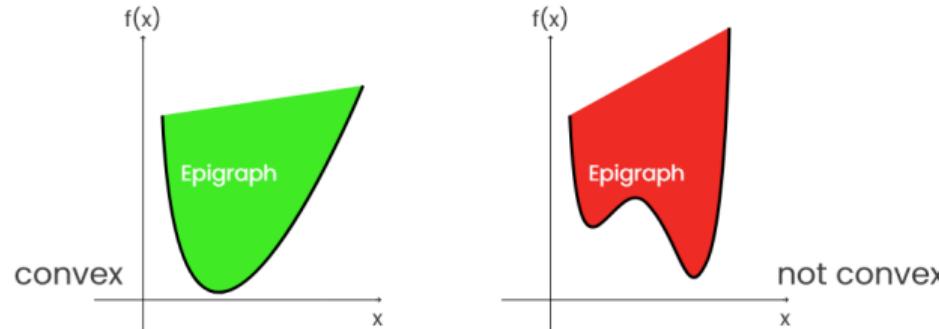
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{x}_i\right) &= f((1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{x}_{k+1}) \leq (1 - t)f(\mathbf{p}) + t f(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &\leq (1 - t)f\left(\sum_{j=1}^k s_j \mathbf{x}_j\right) + t f(\mathbf{x}_{k+1}) \leq (1 - t) \sum_{j=1}^k s_j f(\mathbf{x}_j) + t f(\mathbf{x}_{k+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^k t_j f(\mathbf{x}_j) + t f(\mathbf{x}_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} t_i f(\mathbf{x}_i). \quad \square \end{aligned}$$

# Funciones Convexas

## Definición

Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos el **epígrafo** de  $f$ , como el conjunto

$$\text{Epi}(f) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y \geq f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$



## Teorema

$f$  es convexa  $\iff$  su epígrafo  $\text{Epi}(f)$  es un conjunto convexo.

Prueba: ( $\Rightarrow$ ). Supongamos que  $f$  es convexa, y sean  $(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k) \in \text{Epi}(f)$ .

# Funciones Convexas

Tomemos cualquier juego de coeficientes  $t_1, t_2, \dots, t_k \in [0, 1]$ , tales que  $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ . Consideramos el punto

$$(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^k t_i (\mathbf{x}_i, y_i) = \left( \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^k t_i y_i \right) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Este punto satisface

$$y = \sum_{i=1}^k t_i y_i \geq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) = f(\mathbf{x}),$$

de modo que  $(\mathbf{x}, y) \in \text{Epi}(f)$ , lo que muestra que  $\text{Epi}(f)$  es convexo.

( $\Leftarrow$ ) Tomamos  $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)), \dots, (\mathbf{x}_k, f(\mathbf{x}_k)) \in \text{Epi}(f)$ . Como  $\text{Epi}(f)$  es convexo, entonces se cumple que

$$\sum_{i=1}^k t_i (\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)) = \left( \sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i) \right) \in \text{Epi}(f).$$

Esto implica que  $f\left(\sum_{i=1}^k t_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^k t_i f(\mathbf{x}_i)$ , y portanto  $f$  es convexa.  $\square$

# Funciones Convexas

Observaciones:

- Directamente de la definición, tenemos que  $f$  es convexa  $f|_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$  es convexa, cuando se restringe a cualquier segmento  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , con  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$ .  
De ahí que  $f$  es convexa para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ , y para todo  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ , la función  $g(t) = (\mathbf{x} + t\mathbf{h})$  es convexa en el dominio  $\{t \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + t\mathbf{h} \in \Omega\}$ .
- En ocasiones conviene extender una función convexa  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a valores en la recta extendida  $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , por

$$\widehat{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega; \\ +\infty, & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

Claramente  $\widehat{f}|_{\Omega} = f$ , y se tiene que  $f$  es convexa  $\iff \widehat{f}$  es convexa.

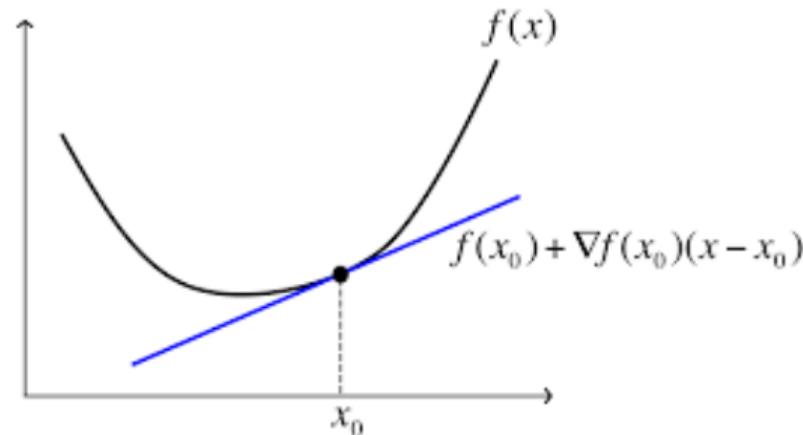
- En el caso de  $\widehat{f}$ , la convexidad sigue siendo definida por la desigualdad (1), con la diferencia que se usa aritmética extendida.

# Condiciones de Optimalidad

## Teorema (Condición de 1er Orden)

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y que  $\Omega$  es convexo. Entonces  $f$  es convexa si, y sólo si, para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$  vale

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$



Si  $f$  es convexa, el plano tangente a  $f$  en  $\mathbf{x}_0$  está por debajo del grafo de  $f$ .

# Condiciones de Optimalidad

Prueba: ( $\Rightarrow$ ) Como  $\Omega$  es convexo, para  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$  se tiene que  $(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\forall 0 \leq t \leq 1$ . Si  $f$  es convexa, de la desigualdad de Jensen (1), tenemos

$$f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}) \leq (1-t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + t(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)),$$

para todo  $0 < t < 1$ . Luego  $f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0) \leq t(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))$ , y

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0), \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

Como  $f$  es diferenciable, tomando el límite cuando  $t \rightarrow 0^+$ , obtenemos

$$\nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0),$$

lo que produce  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ .

( $\Leftarrow$ ) Tome  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ , y sea  $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$ , con  $0 \leq t \leq 1$ . Por hipótesis

# Condiciones de Optimalidad

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}_0) &\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}), \\f(\mathbf{x}) &\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Haciendo una combinación convexa de ambas ecuaciones, resulta

$$\begin{aligned}(1-t)f(\mathbf{x}_0) + tf(\mathbf{x}) &\geq (1-t)[f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x}_0 - \mathbf{z})] + t[f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T (\mathbf{x} - \mathbf{z})] \\&\geq [(1-t) + t]f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T [(1-t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}) + t(\mathbf{x} - \mathbf{z})] \\&\geq f(\mathbf{z}) + \nabla f(\mathbf{z})^T \underbrace{[(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} - \mathbf{z}]}_{=0} = f(\mathbf{z}) \\&\geq f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Dado que  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$  son arbitrarios, esto muestra que  $f$  es convexa.  $\square$

## Corolario

Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y convexa. Si  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , para  $\mathbf{x}^* \in \Omega$ , entonces  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo global de  $f$ .

# Condiciones de Optimalidad

Prueba: El teorema anterior implica que  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .  
Por tanto,  $\mathbf{x}^*$  es mínimo global de  $f$ .  $\square$

## Teorema (Condición de 2do Orden)

Suponga que  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es dos veces diferenciable y que  $\Omega$  es abierto y convexo.  
Entonces  $f$  es convexa si, y sólo si, para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $D^2f(\mathbf{x}) \succeq 0$ .

Prueba: ( $\Leftarrow$ ) Suponga que  $D^2f(\mathbf{x})$  es positiva semidefinida, para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Tomemos  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$  y definamos  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . De la Fórmula de Taylor

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \mathbf{h},$$

para algún  $0 < t < 1$ .

Por lo tanto  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \in \Omega$ , ya que es una combinación convexa de  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Esto implica que el término  $\frac{1}{2} \mathbf{h}^T D^2f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \mathbf{h} \geq 0$ , de modo que

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

De la Condición de optimalidad de 1er. orden,  $f$  es convexa.

# Condiciones de Optimalidad

( $\Rightarrow$ ) Suponga ahora que  $f$  es convexa. Tome  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\Omega$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $\mathbb{D}_r(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$ . Tomaremos  $\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{k}\mathbf{p}$  un múltiplo suficientemente pequeño de  $\mathbf{p}$ , de modo que  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x})$ . Como  $f$  es convexa,

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}}.$$

Por el Teorema de Taylor,

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{p}}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}}, \quad t \in (0, 1).$$

Combinando las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}} \geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{p}}.$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{p}}) \tilde{\mathbf{p}} \geq 0.$$

Haciendo  $t \rightarrow 0$ , se obtiene que  $\tilde{\mathbf{p}}^T D^2 f(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{p}} \geq 0$ . Y como esto vale para todo  $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{D}_r(\mathbf{x})$ , se tiene que  $D^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0$  es positiva semidefinida.  $\square$

# Condiciones de Optimalidad

## Corolario

*Si  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y 2-veces diferenciable, cualquier punto estacionario  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  de  $f$ , es un mínimo global.*

Prueba: Como  $\mathbf{x}^*$  es punto estacionario de  $f$ , entonces  $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ . Además, como  $f$  es convexa y 2-veces diferenciable, entonces  $D^2f(\mathbf{x}^*) \succeq \mathbf{0}$ . De las condiciones de optimidad, se obtiene que para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T D^2f(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Portanto,  $\mathbf{x}^*$  es mínimo global de  $f$ .  $\square$

## Proposición

*Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable,  $\Omega$  convexo. Entonces  $f$  es convexa  $\iff$   $(\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}))^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ .*

# Condiciones de Optimalidad

Prueba: Como  $f$  es convexa, de la condición de primer orden tenemos

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{y}) &\geq f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}) &\geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{0} \geq (\nabla f(\mathbf{x})^T - \nabla f(\mathbf{y})^T)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Portanto,  $(\nabla f(\mathbf{x})^T - \nabla f(\mathbf{y})^T)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$ .

( $\Rightarrow$ ) (pendiente).

## Proposición

*Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y convexa, entonces  $\mathbf{x}^*$  es un óptimo global de  $f$*

$$\iff \nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}, \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba: Haga  $\mathbf{x} = -\nabla f(\mathbf{x}^*)^T + \mathbf{x}^*$ . Entonces,  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = -\|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 \leq \mathbf{0}$ .

De ahí que  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  implica que  $\nabla f(\mathbf{x}^*)^T = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{x}^*$  es un punto crítico. La convexidad de  $f$  implica entonces que  $\mathbf{x}^*$  es un mínimo global.  $\square$

# Ejemplos

## Ejemplos de funciones convexas en $\mathbb{R}$ :

- (Exponencial):  $f(x) = e^{ax}$  es convexa en todo  $\mathbb{R}$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .  
Basta ver que  $f'(x) = ae^{ax}$  y  $f''(x) = a^2e^{ax} \geq 0$ . Luego  $f$  es convexa.  
(De hecho,  $f$  es estrictamente convexa para  $a \neq 0$ ).
- (Potencias):  $f(x) = x^a$  es estrictamente convexa sobre  $\mathbb{R}^+$ , para  $a \geq 1$  o  $a \leq 0$ .  
Basta ver que  $f'(x) = ax^{a-1}$  y  $f''(x) = a(a-1)x^{a-2} > 0$ , cuando  $a < 0$  ó  $a > 1$ .
- (Potencias del valor absoluto): Las funciones  $f(x) = |x|^p$  son convexas para  $p \geq 1$ .

$$f'(x) = p|x|^{p-1} \cdot \frac{d}{dx}|x| = p|x|^{p-1} \cdot \frac{x}{|x|} = p x|x|^{p-2}.$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= p|x|^{p-2} + p(p-2)x|x|^{p-3} \cdot \frac{d}{dx}|x| = p|x|^{p-2} + p(p-2)x^2|x|^{p-4} \cdot \frac{x}{|x|} \\&= p|x|^{p-4}(|x|^2 + (p-2)x^2) = p|x|^{p-4}(x^2 + (p-2)x^2) \\&= p(p-1)x^2|x|^{p-4} \geq 0\end{aligned}$$

cuando  $p \geq 1$ .

# Ejemplos

- (Logaritmo negativo):  $f(x) = -\log(x)$  es convexa en todo  $\mathbb{R}^+$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Basta ver que  $f'(x) = -\frac{1}{x}$  y  $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ . Luego  $f$  es estrictamente convexa.
- (Entropía):  $f(x) = x \log(x)$  es estrictamente convexa sobre  $\mathbb{R}^+$ . Observe que  $f'(x) = \log(x) + 1$  y  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ .
- (Funciones lienales): Las funciones  $f(x) = ax + b$  son siempre convexas y cónicas,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

# Ejemplos

## Ejemplos de funciones convexas en $\mathbb{R}^n$ :

- (Normas): Toda norma en  $\mathbb{R}^n$  es convexa.

De la homogeneidad y la desigualdad triangular, tenemos

$$\|(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \leq \|(1-t)\mathbf{x}\| + \|t\mathbf{y}\| = (1-t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\|, \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

- (Máximos): La función  $f(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$  es convexa.

Recuerde que  $\max_i \{a_i + b_i\} \leq \max_i \{a_i\} + \max_i \{b_i\}$ . (¿Por qué?)

De ahí que

$$\max_i ((1-t)x_i + ty_i) \leq \max_i (1-t)x_i + \max_i ty_i = (1-t) \max_i x_i + t \max_i y_i.$$

- (Log-sum-exp): La función  $f(\mathbf{x}) = \log \left( \sum_{i=1}^n e^{x_i} \right)$  es convexa en  $\mathbb{R}^n$ . (Hay que calcular la Hessiana y mostrar que es  $\succeq 0$  + Cauchy-Schwarz).

# Ejemplos

- (Media geométrica): La función  $f(\mathbf{x}) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$  es convexa en  $\mathbb{R}^n$ .  
(De nuevo, calcular la Hessiana y mostrar que es  $\succeq 0$  + Cauchy-Schwarz).
- (Log-det): El logaritmo negativo del determinante  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $f(X) = -\log \det X$  es convexa en el conjunto de matrices positivas definidas en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .