

CONDICIONAMIENTO Y ESTABILIDAD

ALAN REYES-FIGUEROA
MÉTODOS NUMÉRICOS II

(AULA 05) 29.JULIO.2025

Condicionamiento

En abstracto, un problema numérico es una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios normados. (X = espacio de datos, Y = espacio de soluciones). f es generalmente no lineal, pero la mayoría de las veces es continua.

Nos interesa el comportamiento de un problema f en un punto de datos particular $\mathbf{x} \in X$. La combinación de un problema f con datos prescritos $\mathbf{x}$ es llamada una **instancia** del problema.

Definición

Un problema (instancia) **bien condicionado** es un problema con la propiedad de que toda pequeña perturbación de $\mathbf{x}$ conduce sólo a pequeños cambios en $f(\mathbf{x})$. Un problema **mal condicionado** es un problema con la propiedad de que una pequeña perturbación de $\mathbf{x}$ conduce a un gran cambio en $f(\mathbf{x})$.

Definición

Sea $\delta \mathbf{x}$ una pequeña perturbación de $\mathbf{x}$ y sea $\delta f = f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$. El **número de condición absoluta** $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}(\mathbf{x})$ del problema f en $\mathbf{x}$ se define como

$$\hat{\kappa}(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta \mathbf{x}\| < \delta} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta \mathbf{x}\|}. \quad (1)$$

Generalmente escribiremos (1) como

$$\hat{\kappa}(\mathbf{x}) = \sup_{\delta \mathbf{x}} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta \mathbf{x}\|}. \quad (2)$$

en el entendido de que $\delta \mathbf{x}$ y δf son infinitesimales.

Si f es diferenciable, podemos evaluar el número de condición por medio de la derivada de f . La definición de la derivada nos da, en primer orden, $\delta f \approx Df(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x}$, (igualdad en el límite $\|\delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$). Así, el número de condición absoluta se convierte en $\hat{\kappa}(\mathbf{x}) = \|Df(\mathbf{x})\|$.

Definición

Sea $\delta \mathbf{x}$ una pequeña perturbación de $\mathbf{x}$ y sea $\delta f = f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$. El **número de condición relativa** $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$ del problema f en $\mathbf{x}$ se define como

$$\kappa(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta \mathbf{x}\| < \delta} \left(\frac{\|\delta f\|}{\|f(\mathbf{x})\|} / \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta \mathbf{x}\| < \delta} \frac{\|\delta f\| \|\mathbf{x}\|}{\|f(\mathbf{x})\| \|\delta \mathbf{x}\|}. \quad (3)$$

o asumiendo nuevamente que $\delta \mathbf{x}$ y δf son infinitesimales

$$\kappa(\mathbf{x}) = \sup_{\delta \mathbf{x}} \frac{\|\delta f\| \|\mathbf{x}\|}{\|f(\mathbf{x})\| \|\delta \mathbf{x}\|}. \quad (4)$$

Si f es diferenciable, esta cantidad se expresa como $\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\|Df(\mathbf{x})\|}{\|f(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\|}$.

Con estas definiciones, ya podemos decir que un problema es bien condicionado si κ es pequeño (e.g., 1, 10, 10^2), o mal condicionado si κ es grande (e.g., 10^6 , 10^{16}).

Condicionamiento

Ejemplo: Considere el problema de calcular $\sqrt{x}$, para $x > 0$. El jacobiano de $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ es la derivada $Df(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, por lo que tenemos

$$\kappa(x) = \frac{\|Df(x)\|}{\|f(x)\|/\|x\|} = \frac{1/2\sqrt{x}}{\sqrt{x}/x} = \frac{1}{2},$$

de modo que este es un problema bien condicionado.

Ejemplo: Considere ahora el problema de obtener el escalar $f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$ del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Para simplificar, usamos la norma ∞ en el espacio de datos $\mathbb{R}^2$. El jacobiano de f es

$$Df(\mathbf{x}) = (1 \quad -1) \Rightarrow \|Df(\mathbf{x})\|_{\infty} = 2.$$

Entonces, el número de condición es

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{\|Df(\mathbf{x})\|}{\|f(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\|} = \frac{2 \max\{|x_1|, |x_2|\}}{|x_1 - x_2|}.$$

Esta cantidad es grande si $|x_1 - x_2| \approx 0 \Rightarrow$, el problema mal condicionado si $x_1 \approx x_2$.

Condicionamiento

Otros problemas mal condicionados:

- Calcular las raíces de un polinomio.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Hallar los autovalores de una matriz no simétrica.

Ejemplo:

El problema de calcular los autovalores de una matriz no simétrica, es a menudo mal acondicionado. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de A son $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. Los autovalores de A' son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.

Condicionamiento

Se puede mostrar que si A es una matriz simétrica (o una matriz normal), entonces sus autovalores están bien condicionados.

Por otro lado, se puede demostrar que si λ y $\lambda + \delta\lambda$ son los correspondientes autovalores de A y $A + \delta A$, entonces $|\delta\lambda| < \|\delta A\|_2$, con igualdad si δA es un múltiplo de la matriz identidad (ejercicio 26.3).

Por lo tanto, el número de condición absoluta del problema de valores propios simétricos es $\hat{\kappa} = 1$, si se miden las perturbaciones en la norma 2, y el número de condición relativa es $\kappa = \|A\|_2/|\lambda|$.

Condicionamiento

Condición del producto matriz-vector:

Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ y considere el problema de calcular $A\mathbf{x}$ para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Vamos a determinar un número de condición correspondiente a perturbaciones de $\mathbf{x}$ pero no de A . Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial arbitraria, y su respectiva norma matricial inducida. Trabajando directamente con la definición de κ , entonces

$$\kappa(\mathbf{x}) = \sup_{\delta \mathbf{x}} \left(\frac{\|A(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - A\mathbf{x}\|}{\|A\mathbf{x}\|} / \frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) = \sup_{\delta \mathbf{x}} \left(\frac{\|A(\delta \mathbf{x})\|}{\|\delta \mathbf{x}\|} / \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right).$$

Esto es

$$\kappa(\mathbf{x}) = \|A\| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A\mathbf{x}\|}. \quad (5)$$

Suponga en el cálculo anterior que A es una matriz cuadrada y no singular. Entonces podemos usar el hecho de que $\|\mathbf{x}\|/\|A\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|$ en (5) para hallar una cota para κ :

$$\kappa(\mathbf{x}) \leq \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (6)$$

o escribir

$$\kappa(\mathbf{x}) = \alpha \|A\| \|A^{-1}\|, \quad \text{con } \alpha = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A\mathbf{x}\|} / \|A^{-1}\|. \quad (7)$$

Para ciertas elecciones de $\mathbf{x}$, se tiene $\alpha = 1$ y, en consecuencia, $\kappa = \|A\| \|A^{-1}\|$. Por ejemplo, si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, esto ocurrirá siempre que $\mathbf{x}$ sea múltiplo del mínimo vector singular derecho de A .

De hecho, A no tiene por qué ser cuadrada. Si $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ con $m > n$, es de rango completo, las ecuaciones (6) y (7) se mantienen con A^{-1} reemplazada por la pseudoinversa A^+ .

¿Qué pasa con el problema inverso: dada A , calcular $A^{-1}\mathbf{b}$ a partir de la entrada $\mathbf{b}$? Es idéntico al problema que acabamos de considerar, excepto que A se reemplaza por A^{-1} .

Resumimos esto en el siguiente resultado.

Condicionamiento

Teorema

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no singular y considere la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. El problema de calcular $\mathbf{b}$, dado $\mathbf{x}$, tiene número de condición

$$\kappa(\mathbf{x}) = \|A\| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (8)$$

con respecto a las perturbaciones de $\mathbf{x}$.

El problema de calcular $\mathbf{x}$, dado $\mathbf{b}$, tiene número de condición

$$\kappa(\mathbf{b}) = \|A^{-1}\| \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (9)$$

con respecto a las perturbaciones de $\mathbf{b}$.

Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, entonces la igualdad se mantiene en (8) si $\mathbf{x}$ es un múltiplo del mínimo vector singular derecho de A , y la igualdad se cumple en (9) si $\mathbf{b}$ es un múltiplo del mayor vector singular izquierdo de A .

Definición

El producto $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ se llama el **número de condición** de la matriz A .

Cuando $\kappa(A)$ es pequeño, se dice que A está **bien condicionada**; si $\kappa(A)$ es grande, decimos que A está **mal condicionada**.

En el caso en que A es singular, escribimos $\kappa(A) = \infty$.

En el caso de la 2-norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, entonces $\|A\| = \sigma_1$ y $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_m}$. Entonces

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}. \quad (10)$$

en la 2-norma. La relación σ_1/σ_m puede interpretarse como la excentricidad de la hiperelipse que es la imagen de la esfera unitaria de $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ bajo A .

Número de Condición

Para una matriz rectangular $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$, de rango completo, el número de condición se define en términos de la pseudoinversa: $\kappa(A) = \|A\| \|A^+\|$. Como A^+ está motivado por problemas de mínimos cuadrados, esta definición es más útil en el caso $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, donde tenemos

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}. \quad (11)$$

Pregunta: En el teorema anterior, fijamos A y perturbamos los vectores $\mathbf{x}$ o $\mathbf{b}$. ¿Qué ocurre si ahora perturbamos A ?

Dejamos fijo $\mathbf{b}$ y consideramos el comportamiento del problema $A \rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, cuando A se perturba por un infinitesimal δA . Entonces $\mathbf{x}$ debe cambiar por un infinitesimal $\delta \mathbf{x}$, donde

$$(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Usando la igualdad $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y eliminando el término doblemente infinitesimal $(\delta A)(\delta \mathbf{x})$, obtenemos $(\delta A)\mathbf{x} + A(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, es decir, $\delta \mathbf{x} = -A^{-1}(\delta A)\mathbf{x}$.

Número de Condición

Esta ecuación implica que $\|\delta \mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\mathbf{x}\|$, o equivalentemente

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \bigg/ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| = \kappa(A).$$

La igualdad en esta cota se cumple siempre que δA sea tal que

$$\|A^{-1}(\delta A)\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\mathbf{x}\|,$$

y se puede demostrar mediante el uso de normas duales (ejercicio 3.6) que para cualquier A y cualquier norma $\|\cdot\|$, tales perturbaciones δA existen. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Teorema

Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ fijo y considere el problema de calcular $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, donde A es cuadrada y no singular. El número de condición de este problema con respecto a las perturbaciones en A es

$$\kappa = \|A^{-1}\| \|A\| = \kappa(A).$$