Métodos Numéricos II 2024

Lista 02

08.agosto.2024

1. Implemente un algoritmo o función que, dada una matriz A, calcule las siguientes descomposiciones (una función diferente para cada una):

   a) $PA = LU$

   b) Cholesky.

   c) QR.

   En cada caso, la función debe recibir como único argumento la matriz a factorar, y debe devolver cada una de las matrices componentes de la factoración.
   Su algoritmo debe incluir una evaluación de condiciones necesarias sobre la matriz A e indicar mensajes cuando la factoración deseada no sea posible.

   (Sugerencia: por ejemplo, para evaluar si una matriz A es positiva definida, pueden implementar una función que calcule los autovalores de A y devuelva `True`/`False` según sean todos positivos o no.)

   Utilizar las funciones anteriores para obtener las descomposiciones LU, $PA = LU$, LL^T y QR (en caso existan), para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Implementar algoritmos para los métodos de Jacobi, Seidel, JOR y SOR (de nuevo, una función para cada uno), para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En este caso, además de la información del sistema, cada función debe recibir como argumento una $\mathbf{x}_0$ como punto inicial, una tolerancia máxima $\varepsilon > 0$ para el criterio de paro, un número máximo de iteraciones `maxI`, y cuando sea necesario el parámetro ω.

   Resuelva el sistema tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

   donde $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$.
   Compare los cuatro métodos en términos de rapidez de convergencia, y en términos de error respecto a la solución exacta $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Para JOR y SOR, use valores de ω adecuados que aceleren la convergencia de los métodos.

3. **Mínimos cuadrados:** Una forma de aproximar una función integrable $f(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$, es considerar una aproximación $\widehat{f}(x)$ de la forma

$$\widehat{f}(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x),$$

donde la $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ son todas integrables. (Típicamente, se elige $\varphi_j(x)$ como una base de funciones).

Cuando $[a,b] = [0,1]$, y la base de funciones es

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \ldots, \varphi_n(x) = x^n,$$

esto conduce al sistema de ecuaciones $H\mathbf{c} = \mathbf{b}$, dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x)\,dx \\ \int_0^1 x f(x)\,dx \\ \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Las matrices H de la forma anterior se llaman **matrices de Hilbert**, y es bien conocido que sufren de inestabilidad.

a) Calcule el número de condición de la matriz de Hilbert, para $n = 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25$ y 30.

b) Aproxime la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{17} \frac{\sin(k\pi x)}{k},$$

sobre el intervalo $[0,1]$, con un polinomio de grado n, resolviendo el sistema anterior mediante los tres siguientes métodos:

- resolviendo $H\mathbf{c} = \mathbf{b}$ mediante el cálculo directo $\mathbf{c} = H^{-1}\mathbf{b}$,
- resolviendo $H\mathbf{c} = \mathbf{b}$ mediante un sistema acoplado a partir de la factoración LU,
- resolviendo $H\mathbf{c} = \mathbf{b}$ mediante un sistema acoplado a partir de la factoración QR.

Debe realizar lo anterior para diferentes grados del polinomio aproximante $n = 5, 10, 15, 20, 25$ y 30. En cada caso, grafique las tres soluciones obtenidas por los tres métodos de solución y compare cuál aproxima mejor a la solución exacta de $f(x)$. Calcule una tabla de error para poder comparar numéricamente sus aproximaciones.

c) A partir de las comparaciones anteriores, discuta lo siguiente:

- ¿Cuál de los tres métodos de solución produce mejores resultados (menor error)?
- ¿Qué ocurre a medida que se incrementa el grado del polinomio aproximante?

(Observación: No es necesario calcular las integrales exactas en el vector $\mathbf{b}$ en el lado derecho de la ecuación. Puede utilizar algoritmos numéricos aprendidos en el curso de Métodos I para aproximar el valor de estas integrales. La implementación de estos algoritmos debe ser propia.)