Métodos Numéricos II 2024

Lista 01

11.julio.2024

1. Determinar si las siguientes matrices admiten una descomposición espectral $Q\Lambda Q^{-1}$. En caso afirmativo, hallar su descomposición. En caso negativo, proporcionar un argumento para mostrar que no es posible.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. a) Mostrar que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, entonces $||A||_2 = ||\mathbf{u}||_2\, ||\mathbf{v}||_2$.
   b) ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o dé un contraejemplo.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz con $m \geq n$, cuya descomposición SVD es dada por $A = U\Sigma V^T$. Probar lo siguiente:
   a) $A\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.
   b) $A^T\mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Puede usar funciones Python para verificar y comparar su resultado (sólo para verificar).

5. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:
   a) $\mathrm{rank}(B)$.
   b) $\mathrm{Ker}(B)$.
   c) $\mathrm{Im}(B)$.
   d) $||B||_2$ y $||B||_F$.

6. En este ejercicio vamos a calcular normas matriciales inducidas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular las normas inducidas $||A||_1$, $||A||_2$ y $||A||_\infty$, usando lo visto en clase.
   b) Implementar un algoritmo para aproximar cualquier norma $||A||_p$, $p \geq 1$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, usando muestras aleatorias sobre la esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, y calculando el máximo sobre la muestra.
   Aquí la idea es tomar una muestra $\{\mathbf{x}_i\}$ de n de vectores unitarios, calcular el máximo $m_i = \max_i ||A\mathbf{x}_i||_p$. Este experimento se repite un total de N veces. Al final, el resultado devuelto es el mayor de estos máximos:

$$\text{aproximación de } ||A||_p = \max_{1\leq j\leq N} m_j.$$

   Su algoritmo debe permitir ingresar como argumentos, la matriz A, la norma $p \geq 1$, y los parámetros n y N.

c) A partir del algoritmo desarrollado, aproximar el valor de $||A||_3$ y $||A||_4$, $||A||_{100}$ y $||A||_{1.5}$.

d) ¿Qué ocurre a cuando $p \to 1^+$? ¿Y cuando $p \to \infty$? Explicar.

7. Implementar un algoritmo para compresión de imágenes usando la SVD. Su algoritmo debe estar preparado tanto para comprimir imágenes en escala de grises, como imágenes en formato color.

   El usuario debe tener la opción de pasar los siguientes argumentos:

   - la imagen de entrada,
   - el tamaño de los bloques $b \times b$,
   - el número de componentes k a utilizar en la compresión.

   Redactar un informe técnico en el formato indicado, en el cuál deben desarrollar su solución de la implementación.

   Desarrollar al menos dos ejemplos con diferentes imágenes. Para cada imagen

   a) Calcular diferentes compresiones cambiando los parámetros b ó k. Indique las tasas de compresión obtenidas y tiempos de cómputo.

   b) ¿Cuál es el efecto sobre la compresión, al variar b y mantener el número de componentes? Mostrar evidencia

   c) ¿Cuál es el efecto sobre la compresión, al variar k y mantener el tamaño de los bloques? Mostrar evidencia

   d) Discutir los resultados obtenidos.