

Métodos Numéricos II 2023

Lista 02

08.agosto.2023

1. Implemente un algoritmo o función que, dada una matriz A , calcule las siguientes descomposiciones (una función diferente para cada una):

a) $PA = LU$

b) Cholesky.

c) QR .

En cada caso, la función debe recibir como único argumento la matriz a factorar, y debe devolver cada una de las matrices componentes de la factoración.

Su algoritmo debe incluir una evaluación de condiciones necesarias sobre la matriz A e indicar mensajes cuando la factoración deseada no sea posible.

(Sugerencia: por ejemplo, para evaluar si una matriz A es positiva definida, pueden implementar una función que calcule los autovalores de A y devuelva `True/False` según sean todos positivos o no.)

Utilizar las funciones anteriores para obtener las descomposiciones LU , $PA = LU$, LL^T y QR (en caso existan), para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Implementar algoritmos para los métodos de Jacobi, Seidel, JOR y SOR (de nuevo, una función para cada uno), para resolver el sistema $Ax = b$. En este caso, además de la información del sistema, cada función debe recibir como argumento una x_0 como punto inicial, una tolerancia máxima $\varepsilon > 0$ para el criterio de paro, un número máximo de iteraciones $\max I$, y cuando sea necesario el parámetro ω .

Resuelva el sistema tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$, $x, b \in \mathbb{R}^{100}$.

Compare los cuatro métodos en términos de rapidez de convergencia, y en términos de error respecto a la solución exacta $x = (1, 1, \dots, 1)^T$. Para JOR y SOR, use valores de ω adecuados que aceleren la convergencia de los métodos.

3. **Mínimos cuadrados:** Una forma de aproximar una función integrable $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, es considerar una aproximación $\hat{f}(x)$ de la forma

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x),$$

donde las $\varphi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son todas funciones integrables. (Típicamente, se elige $\varphi_j(x)$ como una base de funciones).

Cuando $[a, b] = [0, 1]$, y $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^n$, esto conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^1 x f(x) dx \\ \int_0^1 x^2 f(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^n f(x) dx \end{pmatrix}.$$

Las matrices de la forma anterior se llaman **matrices de Hilbert**, y es bien conocido que sufren de inestabilidad.

- Calcule el número de condición de la matriz de Hilbert, para $n = 2, 3, 5, 10, 15, 20$ y 25 .
 - Aproxime la función $f(x) = \sum_{k=1}^{17} \sin(k\pi x)$, sobre el intervalo $[0, 1]$, con un polinomio de grado 20, resolviendo el sistema anterior mediante el método LU .
 - Aproxime la función $f(x) = \sum_{k=1}^{17} \sin(k\pi x)$, sobre el intervalo $[0, 1]$, con un polinomio de grado 20, resolviendo el sistema ahora mediante el método QR . Compare el error de ambas aproximaciones con la función $f(x)$. ¿Cuál es mejor?
-