# Tipos Especiales de Matrices, Factoraciones $LL^T$ y $LDL^T$

Alan Reyes-Figueroa

Métodos Numéricos II

(Aula 09) 01.agosto.2023

# Diagonal Dominancia

## Definición

*Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es* ***diagonalmente dominante*** *cuando cada entrada de la diagonal principal (en módulo) es mayor o igual que la suma del resto de entradas en la misma fila*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \qquad \textit{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

En caso las desigualdes sean todas estrictas, decimos que $A$ es **estrictamente diagonal dominante**.

**Ejemplo**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$ es diagonalmente dominante, pero $B$ no. De hecho, $A$ es estrictamente diagonal dominante.

## Teorema

*Una matriz estrictamente diagonal dominante A es no singular. En este caso, la eliminación gaussiana se puede realizar en cualquier sistema lineal de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin intercambios de fila o columna, y los cálculos serán estables respecto al crecimiento del error de redondeo.*

Prueba: Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y suponga que existe una solución no trivial $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ para este sistema. Sea $k$ un índice para el que $0 < |x_k| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$. Como $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces cuando $i = k$ se tiene $a_{kk}x_k = -\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j$. De la desigualdad triangular

$$|a_{kk}|\,|x_k| = \Big|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\Big| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\,|x_j| \qquad \Rightarrow \qquad |a_{kk}| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|.$$

Esta desigualdad contradice la dominancia diagonal estricta de $A$. Por consiguiente, la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muestra que $A$ es no singular.

# Diagonal Dominancia

Mostramos ahora que las matrices $U_1, U_2, \ldots U_n$ generadas por el proceso de eliminación gaussiana son estrictamente diagonal dominantes. Eso garantiza que en cada etapa el elemento pivote es distinto a cero.
Como $A = U_1$ es estrictamente diagonal dominante, $a_{11} \neq 0$ y $U_2$ se puede calcular.
Además, para $i = 2, 3, , n$ y $j = 2, 3, \ldots, n$

$$u_{ij}^{(2)} = u_{ij}^{(1)} - \frac{u_{i1}^{(1)}}{u_{ii}^{(2)}} u_{1j}^{(2)}$$

Primero, $u_{i1}^{(2)} = 0$. La desigualdad triangular implica que

$$\sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} |u_{ij}^{(2)}| = \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} \left| u_{ij}^{(1)} - \frac{u_{i1}^{(1)}}{u_{ii}^{(2)}} u_{1j}^{(2)} \right| \leq \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} |u_{ij}^{(1)}| + \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} \frac{|u_{i1}^{(1)}|}{|u_{ii}^{(2)}|} |u_{1j}^{(2)}|$$

Pero, siendo $A$ es estrictamente diagonalmente dominante, sabemos

$$\sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} |u_{ij}^{(1)}| \leq |u_{ii}^{(1)}| - |u_{i1}^{(1)}| \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} |u_{1j}^{(1)}| \leq |u_{11}^{(1)}| - |u_{1i}^{(1)}|,$$

# Diagonal Dominancia

por lo que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} |u_{ij}^{(2)}| &< |u_{ii}^{(1)}| - |u_{i1}^{(1)}| + \frac{|u_{i1}^{(1)}|}{|u_{11}^{(2)}|}\left(|u_{11}^{(1)}| - |u_{1i}^{(1)}|\right) = |u_{11}^{(1)}| + \frac{|u_{i1}^{(1)}|\,|u_{1i}^{(1)}|}{|u_{11}^{(1)}|} \\
&< \left| |u_{11}^{(1)}| + \frac{|u_{i1}^{(1)}|\,|u_{1i}^{(1)}|}{|u_{11}^{(1)}|} \right| = |u_{ii}^{(2)}|
\end{aligned}
$$

Esto establece la diagonal dominancia para las filas $2, 3, \ldots, n$. La primera fila de $U_2$ y de $U_1 = A$ son la misma, por lo que $U_2$ es estrictamente diagonal dominante.

Este proceso continúa de manera inductiva hasta que se obtiene $U_n$ triangular superior y estrictamente diagonal dominante. Esto implica que todos los elementos diagonales son no-nulos, y se puede realizar la eliminación gaussiana sin intercambios de fila.
La demostración de estabilidad para este procedimiento se puede encontrar en el libro de Wendroff, *Theoretical Numerical Analysis*.

# Matrices Positivo Definidas

## Definición

*Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **positiva definida** ($A \succ 0$), si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.*

**Observaciones**:

- No todos los autores requieren la simetría. En el libro de GOLUB y VAN LOAN, para que $A$ sea positiva definida se requiere únicamente que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- Existen definiciones similares:
  - $A$ es **positiva semi-definida** ($A \succeq 0$) si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
  - $A$ es **negativa definida** ($A \prec 0$) si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
  - $A$ es **negativa semi-definida** ($A \preceq 0$) si $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
  - $A$ es **no definida** si no cumple ninguna de las anteriores.
- El signo de $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ clasifica las formas cuadráticas (recordar $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$).

# Matrices Positivo Definidas

**Ejemplo**: La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva.

Tomemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_3x_2 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Mas aún, esta suma es cero, únicamente si todos los términos se anulan, y esto se cumple si, y sólo si, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Entonces $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. Esto muestra que $A$ es definida positiva.

# Matrices Positivo Definidas

## Teorema

*Una matriz simétrica $A$ es definida positiva $\Leftrightarrow$ todos sus autovalores son positivos.*

Prueba: ($\Rightarrow$). Supongamos que $A \succ 0$, y sea $\lambda$ un autovalor de $A$. Observe primero que, como $A$ es simétrica, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por otro lado, existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ autovector asociado a $\lambda$ $\Rightarrow \; A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Entonces $0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda\,||\mathbf{x}||_2^2$. Como $||\mathbf{x}||_2^2 > 0$, entonces $\lambda > 0$.

($\Leftarrow$) Suponga ahora que $\lambda_i > 0$ para todo autovalor de $A$. Por el Teorema Espectral, $A$ posee una base ortonormal de autovectores $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$, con autovalores asociados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Escribimos $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{q}_i$, con al menos una $c_i \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \Big(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{q}_i\Big)^T A\Big(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{q}_i\Big) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_j\,\mathbf{q}_i^T A\mathbf{q}_j \;=\; \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_j\,\mathbf{q}_i^T(\lambda_j\mathbf{q}_j) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_j\,\lambda_j(\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_j) \;=\; \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_ic_j\lambda_j\,\delta_{ij} \;=\; \sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_i \;>\; 0. \quad \square
\end{aligned}$$

# Matrices Positivo Definidas

## Propiedades

*Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica y positiva definida, entonces*

a) *$A$ es no singular,*

b) $\max_{1\le j,k\le n} |a_{jk}| \le \max_{1\le i\le n} |a_{ii}|$,

c) *$a_{ii} > 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$,*

d) *$(a_{ij})^2 < a_{ii}a_{jj}$, para cada $i \neq j$.*

e) *(Criterio de SYLVESTER) Todos los determinantes principales menores de $M_i = A[1:i, 1:i]$ y $N_i = A[i:n, i:n]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ son positivos.*

Prueba: (a) Como todos los autovalores $\lambda_i$ de $A$ son positivos, entonces $\operatorname{rank} A = n$ y $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Esto muestra que $A$ es no singular.

(b) Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tome $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$. Entonces $0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = a_{ii}$.

(c) Para cada $k \neq j$, definamos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ por $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0, -1, 0 \ldots, 0)$, y $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$. Resulta

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a_{jj} - a_{jk} - a_{kj} + a_{kk} = a_{jj} - 2_{jk} + a_{kk}, \\ 0 &< \mathbf{y}^T A\mathbf{y} = a_{jj} + a_{jk} + a_{kj} + a_{kk} = a_{jj} + 2_{jk} + a_{kk}. < \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}| \end{aligned}$$

Entonces $2a_{jk} < a_{jj} + a_{kk}$ y $-2a_{jk} < a_{jj} + a_{kk}$. Luego

$$|a_{jk}| < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|, \qquad \Rightarrow \qquad \max_{1 \leq k,j \leq n} |a_{jk}| < \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|.$$

(d) Para $i \neq j$, definimos $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, \alpha, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Entonces $0 < \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = a_{ii}\alpha^2 + 2a_{ij}\alpha + a_{jj}$. Este polinomio cuadrático en $\alpha$ es siempre positivo, de modo que no posee raíces reales. Entonces su discriminante es negativo. Así, $4a_{ij}^2 - 4a_{ii}a_{jj} < 0 \;\Rightarrow\; a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$, para todo $i \neq j$.

(e) Pendiente. Se deduce de la descomposición de Cholesky $A = R^T R$. $\square$

# Matrices Positivo Definidas

## Teorema

*Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es positiva definida si, y sólo si, la eliminación gaussiana se puede realizar sin intercambios de fila, y todos los elementos pivote son positivos. Además, en este caso, los cálculos son estables respecto al crecimiento del error de redondeo.*

Prueba: Ver libro de WENDROFF, *Theoretical Numerical Analysis*.

# Eliminación Gaussiana Simétrica

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiva definida. Nos interesa descomponer $A$ en factores triangulares $LU$. Si aplicamos un solo paso de la eliminación gaussiana a la matriz $A$, con un 1 en la primera ntrada ($a_{11} = 1$) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & K - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{pmatrix}.$$

Ahora introducimos ceros en la segunda columna. Sin embargo, para mantener la simetría, se hace una variante de la descomposición $LU$, llamada la **factoración de Cholesky**, que primero introduce ceros en la primera fila para coincidir con los ceros recién introducidos en la primera columna de $U$. Podemos hacer esto por una operación triangular superior derecha que resta múltiplos de la primera columna de los siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & K - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}.$$

Esta operación es la transpuesta de la triangular inferior arriba.

# Descomposición de Cholesky

Tenemos
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{w} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K - \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}.$$

La idea de la factorización de Cholesky es continuar este proceso, haciendo cero una columna y una fila de $A$ simétricamente, hasta que se reduce a la identidad.

Para que la reducción triangular simétrica funcione en general, necesitamos una factoración que funcione para cualquier todo $a_{11} > 0$, no sólo el caso $a_{11} = 1$. La generalización se logra ajustando algunos de los elementos de la fila 1, por un factor de $\alpha = \sqrt{a_{11}}$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{w}}{\alpha} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\mathbf{w}^T}{\alpha} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = R_1^T A_1 R_1.$$

Si la entrada superior izquierda de la submatriz $K - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{a_{11}}$ es positiva, el proceso puede repetirse de la mismo forma, para factorizarla. Así, $A_1 = R_2^T A_2 R_2$ y $A = R_1^T R_2^T A_2 R_2 R_1$. Continuando este proceso, obtenemos eventualmente

# Descomposición de Cholesky

$$A = \underbrace{R_1^T R_2^T \cdots R_n^T}_{R^T} I \underbrace{R_n \cdots R_2 R_1}_{R} = R^T R,$$

donde $R$ es triangular superior, y $r_{jj} > 0$, $\forall j$. Esta factoración se conoce como la **descomposición** $LL^T$ o **factoración de** CHOLESKY.

La descripción anterior deja una pregunta. ¿Cómo sabemos que la entrada superior izquierda de la submatriz $K - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{a_{11}}$ es positiva? La respuesta es que debe ser positiva porque $K - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{a_{11}}$ es positiva definida, ya que es el $(n-1) \times (n-1)$ submatriz principal inferior derecha de la matriz definida positiva $R_1^{-T} A R_1^{-1}$. Por inducción, el mismo argumento muestra que todas las submatrices subsiguientes son definidas positivas, y por lo tanto el proceso no concluye con éxito.

## Teorema

*$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y positiva definida $\Leftrightarrow$ admite una factoración $LL^T$.* $\square$

# Descomposición de Cholesky

**Algoritmo**: (Factoración de Cholesky ó $LL^T$).
*Inputs*: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y positiva definida, *Outputs*: $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $A = R^T R$.

`Initialize` $R = A$.
`for` $k = 1$ `to` $n$:
  `for` $j = k+1$ `to` $n$:
    $R_{j,k:n} = R_{j,k:n} - (R_{kj}/R_{kk})\, R_{k,k:n}$,
  $R_{k,k:n} = R_{k,k:n}/\sqrt{R_{kk}}$.

El número de operaciones aritméticas es $O(\frac{1}{3}n^3)$.

# Descomposición de Cholesky

## Teorema

*Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica y positiva definida. Si la descomposición de Cholesky de $A$ se calcula mediante el algoritmo anterior en un computador que satisface los axiomas de la aritmética de punto flotante, , entonces ara todo $\varepsilon_{maq}$ suficientemente pequeño, este proceso está garantizado de ejecutarse hasta el final (es decir, no surgirán entradas pivo cero o negativas $r_{kk}$), generando una matriz $\widetilde{R}$ que satisface*

$$\widetilde{R}^T\widetilde{R} = A + \delta A, \qquad \frac{||\delta A||}{||A||} \leq O(\varepsilon_{maq}),$$

para alguna $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

## Teorema

*Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simétrica y positiva definida. La solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a través de la factoración Cholesky es estable hacia atrás, lo que genera una solución calculada que satisface*

$$(A + \delta A)\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \qquad \frac{||\delta A||}{||A||} = O(\varepsilon_{maq}),$$

para alguna $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

# Descomposición $LDL^T$

Una variante de la descomposición de Cholesky es la **descomposición** $LDL^T$. Esta tiene la particularidad que evita calcular las raíces cuadradas $\sqrt{r_{kk}}$ necesarias en el algoritmo de Cholesky.

Para ello, en el primer paso, se factora la matriz como un producto de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{w}}{a_{11}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{a_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathbf{w}^T}{a_{11}} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = L_1 D_1 L_1^T,$$

donde $L_1$ es triangular inferior con 1s en la diagonal, y $D_1$ ahora tiene en si primera entrada el valor $a_{11}$ en lugar de 1. Continuando este proceso, obtenemos eventualmente vspace-0.2cm

$$A = \underbrace{L_1 L_2 \cdots L_n}_{L} D \underbrace{L_n^T \cdots L_2^T L_1^T}_{L^T} = LDL^T,$$

donde $L$ es triangular inferior con 1s en la diagona, $D$ es diagonal, y $d_{jj} > 0$, $\forall j$. Esta factoración se conoce como la **descomposición** $LDL^T$.

# Descomposición $LDL^T$

**Algoritmo**: (Factoración $LDL^T$).
*Inputs*: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y positiva definida,
*Outputs*: $R, D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tales que $A = R^T DR$.
`Initialize` $R = A$, $D = I$.
`for` $k = 1$ `to` $n$:
    $D_{kk} = R_{kk}$,
    `for` $j = k+1$ `to` $n$:
        $R_{j,k:n} = R_{j,k:n} - (R_{kj}/D_{kk})\, R_{k,k:n}$,
    $R_{k,k:n} = R_{k,k:n}/D_{kk}$.

## Teorema

*$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y positiva definida $\Leftrightarrow$ admite una factoración $LDL^T$.* $\square$

# Relaciones entre Descomposiciones

Tenemos varias relaciones entre las factoraciones discutidas. Suponemos aquí que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y positiva definida.

- Si $A = LDL^T$, entonces $R = D^{1/2}L^T$, resulta en una factoración de Cholesky para $A$:
$$R^TR = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = LDL^T = A.$$

- Si $A = LDL^T$, entonces $U = DL^T$ es triangular superior, y $LU$ resulta en una factoración de Doolitle para $A$:
$$LU = L(DL^T) = LDL^T = A.$$

- Si $A = LDL^T$, entonces $Z = LD$ es triangular inferior, y $ZL^T$ resulta en una factoración de Crout para $A$:
$$ZL^T = (LD)L^T = LDL^T = A.$$

- Si $A = R^TR$, entonces haciendo la factoración $LU$ de $R^T$, obtenemos $R^T = LU$, con $L$ triangular inferior con 1's en la diagonal,
y $U$ es diagonal. Luego, $D = UU^T$ es digaonal y resulta en una factoración $LDL^T$ para $A$:
$$LDL^T = L(UU^T)L^T = (LU)(U^TL^T) = R^TR = A.$$

# Aplicaciones

La factoración de Cholesky es útil en muchas aplicaciones:

- mínimos cuadrados
- optimización no-lineal (método de Newton, DFP, BGFS)
- simulación Monte Carlo
- generación de matrices de covarianza
- filtros de Kalman

Implementaciones computacionales:

- LAPACK (*Linear Algebra Package*, 1970's), Fortran 77.
- LINPACK (*Linear Package*, 1976, Argone Labs.) Fortran, C.
- BLAS (*Basic Linear Algebra Subprograms*).