Técnicas de Pivoteo

Alan Reyes-Figueroa
Métodos Numéricos II

(Aula 08) 01.agosto.2023

Estrategias de Pivoteo

Las técnicas de pivoteo son un método que se aplica a la reducción gaussiana desde la década de 1950. Sirven para reducir el error relativo de los cálculos.

La técnica consiste en elegir "adecuadamente" el pivote x_{kk} en cada paso $k = 1, 2, \ldots, n-1$ de la reducción gaussiana.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}.$$

Existen varias técnicas de pivoteo. Las más usadas son las siguientes:

- pivoteo parcial,
- pivoteo parcial con escalado de columna,
- pivoteo completo.

Estrategias de Pivoteo

Típicamente, en todas las estrategias de pivoteo se elige la entrada máxima (en módulo) sobre un cierto subconjunto de entradas posibles.

En el **pivoteo parcial**, en cada paso elegimos la fila i, $k \leq i \leq m$ tal que $|u_{ik}|$ es máximo.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{x_{kk}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}.$$

- En cada paso hacemos una búsqueda sobre $O(m-k)$ valores posibles, lo que aumenta a $O(n^3)$ la complejidad de la eliminación gaussiana.
- Es similar al de reducción gaussiana con interambio de filas.

Estrategias de Pivoteo

En el **pivoteo completo**, en cada paso elegimos la fila i y la columna j, con $k \leq i \leq m$, $k \leq j \leq n$ tales que $|u_{ij}|$ es máximo.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{x_{kk}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}.$$

- En cada paso hacemos una búsqueda sobre $O((m-k)\cdot(n-k))$ valores posibles, lo que aumenta todavía más la complejidad.
- En la práctica no es muy usado, ya el aumento en el costo computacional es mayor que el beneficio.

Estrategias de Pivoteo

En su lugar se usa el **pivoteo parcial con reescalado de columna**.
Primero, para cada $k \leq i \leq m$, definimos un factor de escala s_i como

$$s_i = \max_{k \leq j \leq n} |u_{ij}|, \qquad k \leq i \leq m.$$

Luego, elegimos la fila i, con $k \leq i \leq m$, $k \leq j \leq n$ tal que $\frac{|u_{ik}|}{s_i}$ es máximo.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}.$$

- La idea es elegir sólo sobre la fila i, tomando en cuenta las escalas de los valores en todo el bloque derecho inferior de la matriz U.
- Si algún $|s_i| = 0$, el sistema no tiene solución única.

Estrategias de Pivoteo

En el **pivoteo completo**, en cada paso elegimos la fila i y la columna j, con $k \leq i \leq m$, $k \leq j \leq n$ tales que $|u_{ij}|$ es máximo.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & \boldsymbol{x_{kk}} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ & x_{kk} & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}.$$

- En cada paso hacemos una búsqueda sobre $O((m-k)\cdot(n-k))$ valores posibles, lo que aumenta todavía más la complejidad.
- En la práctica no es muy usado, ya el aumento en el costo computacional es mayor que el beneficio.

Estrategias de Pivoteo

Ejemplo: $\begin{array}{rcrcr} 0.00300x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17 \\ 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$. La solución exacta es $\begin{pmatrix} x_1 = 10.0 \\ x_2 = 1.0 \end{pmatrix}$.

En aritmética de 4 dígitos, si no usamos pivoteo, el sistema resulta en

$$\begin{pmatrix} 0.00300 & + & 59.14 & \approx & 59.17 \\ & - & 104,300 & \approx & -104,400 \end{pmatrix}$$

y la solución resulta $x_2 = \frac{-104400}{-104300} = 1.001$, y $x_1 = \frac{59.17 - 59.14(1.001)}{0.003} = \frac{59.17 - 59.20}{0.003} = -10.00$.

Usando pivoteo parcial, tendríamos $\begin{array}{rcrcr} 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \\ 0.00300x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17 \end{array}$. Luego

$$\begin{pmatrix} 5.291 & - & 6.130 & \approx & 46.78 \\ & + & 59.142 & \approx & 59.14 \end{pmatrix}$$

Así, $x_2 = \frac{59.14}{59.14} = 1.000$ y $x_1 = \frac{46.78 + 6.130(1.000)}{5.291} = 10.00$.

Estrategias de Pivoteo

Ejemplo: $\begin{array}{rcrcr} 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & 591700 \\ 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \end{array}$. La solución exacta es $\begin{pmatrix} x_1 = 10.0 \\ x_2 = 1.0 \end{pmatrix}$.

En aritmética de 4 dígitos, si usamos pivoteo parcial, el sistema resulta en

$$\begin{pmatrix} 30.00 & + & 591400 & \approx & 591700 \\ & - & 104,300 & \approx & -104,400 \end{pmatrix}$$

y la solución resulta $x_2 = \frac{-104400}{-104300} = 1.001$, $x_1 = \frac{591700-591400(1.001)}{30.0} = \frac{591700-592000}{30.0} = -10.00$.

Usando pivoteo reescalado de columna, tendríamos

$$s_1 = 591700, \quad s_2 = 46.78, \quad \Rightarrow \quad \frac{|a_{11}|}{s_1} = \frac{30.0}{591700} = 5.070 \times 10^{-5}, \quad \frac{a_{21}}{s_2} = \frac{5.291}{46.78} = 0.1131.$$

De ahí el sistema se escribe $\begin{array}{rcrcr} 5.291x_1 & - & 6.130x_2 & = & 46.78 \\ 0.00300x_1 & + & 59.14x_2 & = & 59.17 \end{array}$, y obtenemos la solución $x_2 = \frac{59.14}{59.14} = 1.000$ y $x_1 = \frac{46.78+6.130(1.000)}{5.291} = 10.00$.

Descomposición de Crout

En el caso $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a la descomposición LU que vimos en el aula anterior, también se le llama la **descomposición de Doolittle**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & * & * & \dots & * \\ & u_{22} & * & & * \\ & & u_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Existe otro tipo de factoración LU, llamada la **descomposición de Crout**. Esta es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \ell_{11} & & & & \\ * & \ell_{22} & & & \\ * & * & \ell_{33} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema (Teorema 22.1, Libro de Trefethen)

Sea $A = LU$ la factoración de una matriz no singular $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se calcula por eliminación gaussiana sin pivoteo en una computadora que satisfaga los axiomas de la aritmética de punto flotante (13.5) y (13.7). Si A tiene una factorización LU, entonces, para todos los ε_{maq} suficientemente pequeños, la factoración completa con éxito en aritmética de punto flotante (no se encuentran pivotes cero), y las matrices calculadas $\widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$ satisfacen

$$\widetilde{L}\widetilde{U} = A + \delta A, \qquad \frac{||\delta A||}{||L||\,||U||} = O(\varepsilon_{maq}),$$

para alguna $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Teorema (Teorema 22.2, Libro de Trefethen)

Sea $PA = LU$ la factoración de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ calculada por eliminación gaussiana con pivoteo parcial (algoritmo 21.1) en un computador que satisfaga los axiomas (13.5) y (13.7). Entonces las matrices calculadas $\widetilde{P}, \widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$ satisfacen

$$\widetilde{L}\widetilde{U} = \widetilde{P}A + \delta A, \qquad \frac{||\delta A||}{||A||} = O(\rho\varepsilon_{maq}),$$

para alguna $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde ρ es el factor de crecimiento para A. Si $|\ell_{jk}| < 1$ para cada $j > k$, lo que implica que no hay empates en la selección de pivotes, entonces $\widetilde{P} = P$ para toda ε_{maq} suficientemente pequeña.

En otras palabras, la eliminación gaussiana es estable hacia atrás.