Métodos Numéricos II 2022

Lista 01

28.julio.2022

1. Algunas p-normas vectoriales y matriciales están relacionadas por desigualdades, casi siempre envolviendo a las dimensiones m y n. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pruebe que:

   a) $||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2$.

   b) $||\mathbf{x}||_2 \leq \sqrt{n}\,||\mathbf{x}||_\infty$.

   c) $||A||_\infty \leq \sqrt{n}\,||A||_2$.

   d) $||A||_2 \leq \sqrt{m}\,||A||_\infty$.

2. En clase mostramos que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, entonces $||A||_2 = ||\mathbf{u}||_2\,||\mathbf{v}||_2$. ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o dé un contraejemplo.

3. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:

   a) $\operatorname{rank}(B)$.

   b) $\operatorname{Ker}(B)$.

   c) $\operatorname{Im}(B)$.

   d) $||B||_2$ y $||B||_F$.

5. a) Calcular el número de condición en la norma 2, para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ¿Qué se puede decir del error esperado, al resolver los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando se perturba la matriz del sistema?

   b) Compruebe su respuesta anterior comparando la soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   c) En contraste, compare ahora las soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1001 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

   Discuta sus resultados.

6. Implementar el algoritmo de Gauss-Jordan, y un algoritmo para calcular el determinante de una matriz. Luego, usar ambos para implementar un método para calcular la inversa de una matriz cuadrada.

   Usar dicho método para hallar las inversas de las siguiente matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \\ -2 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

7. Implemente un algoritmo o función que, dada una matriz A, calcule las siguientes descomposiciones (una función diferente para cada una):

   a) $PA = LU$

   b) Cholesky.

   c) QR.

   En cada caso, la función debe recibir como único argumento la matriz a factorar, y debe devolver cada una de las matrices componentes de la factoración.
   Su algoritmo debe incluir una evaluación de condiciones necesarias sobre la matriz A e indicar mensajes cuando la factoración deseada no sea posible.

   (Sugerencia: por ejemplo, para evaluar si una matriz A es positiva definida, pueden implementar una función que calcule los autovalores de A y devuelva `True`/`False` según sean todos positivos o no.)

   Utilizar las funciones anteriores para obtener las descomposiciones LU, $PA = LU$, LL^T y QR (en caso existan), para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. **Mínimos cuadrados:** Una forma de aproximar una función integrable $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, es considerar una aproximación $\widehat{f}(x)$ de la forma

$$\widehat{f}(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x),$$

   donde la $\varphi_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ son todas integrables. (Típicamente, se elige $\varphi_j(x)$ como una base de funciones).

   Cuando $[a, b] = [0, 1]$, y $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \ldots, \varphi_n(x) = x^n$), esto conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x)\,dx \\ \int_0^1 x f(x)\,dx \\ \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_0^1 x^n f(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

   Las matrices de la forma anterior se llaman **matrices de Hilbert**, y es bien conocido que sufren de inestabilidad.

a) Calcule el número de condición de la matriz de Hilbert, para $n = 2, 3, 5, 10, 15, 20$ y 25.

b) Aproxime la función $f(x) = \sum_{k=1}^{17} \sin(k\pi x)$, sobre el intervalo $[0, 1]$, con un polinomio de grado 20, resolviendo el sistema anterior mediante el método LU.

c) Aproxime la función $f(x) = \sum_{k=1}^{17} \sin(k\pi x)$, sobre el intervalo $[0, 1]$, con un polinomio de grado 20, resolviendo el sistema ahora mediante el método QR. Compare el error de ambas aproximaciones con la función $f(x)$. ¿Cuál es mejor?
