Métodos Numéricos II 2021

Lista 04

30.agosto.2021

1. Implementar los siguientes métodos de descenso gradiente (naïve = tamaño de paso α constante):

   - descenso gradiente naïve con dirección fija (ángulo fijo)
   - descenso gradiente naïve con dirección de descenso aleatoria
   - descenso máximo naïve

   En cada uno de los métodos, su función debe recibir los siguientes argumentos: la función objetivo f, el gradiente de la función objetivo df, un punto inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, el tamaño de paso $\alpha > 0$, el número máximo de iteraciones $maxIter$, la tolerancia ε, así como un criterio de paro. En el primer caso, también debe recibir el ángulo ϕ que la dirección de descenso $\mathbf{d}_k$ hace con el gradiente $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$.

   Como resultado, sus algoritmos deben devolver: la mejor solución encontrada $best\ \mathbf{x}$ (la última de las aproximaciones calculadas); la secuencia de iteraciones $\mathbf{x}_k$; la secuencia de valores $f(\mathbf{x}_k)$; la secuencia de errores en cada paso (según el error de su criterio de paro).
   Además, es deseable indicar el número de iteraciones efectuadas por el algoritmo, y si se obtuvo o no convergencia del método.

2. Testar sus algoritmos del Ejercicio 1 con las siguientes funciones:

   a) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + \tfrac{1}{2}y + 1.$$
   b) La función de Rosembrock 2-dimensional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
   $$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

   En cada uno de los casos, hallar un tamaño de paso α que garantice la convergencia de los métodos, y elabore una tabla con las primeras 4 y las últimas 4 aproximaciones $\mathbf{x}_k$ obtenidas.
   En el caso de la función de Rosembrock, puede utilizar como punto inicial el punto $\mathbf{x}_0 = (-1.2, 1)$.

   Para este tamaño de paso, comparar:

   - la solución aproximada obtenida
   - el error de aproximación
   - la norma del gradiente en la solución

   Elabore gráficas que muestren el error de aproximación, en función del número de iteración, y muestre la comparación de la evolución de la convergencia en sus tres métodos. A partir de estas gráficas, discuta cuál de los métodos es más efectivo, en cada caso.

3. Construya una función "suma de gaussianas" 2-dimensional, en la forma
   $$f(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{k} \exp\big(-\tfrac{1}{2\sigma}||\mathbf{x} - \mathbf{x}_k||_2^2\big),$$
   donde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son puntos en el rectángulo $[0, 8] \times [0, 8]$ elegidos de forma aleatoria (distribución uniforme). Use $k = 8$, Aquí, $\sigma > 0$ es un parámetro de escala definido por el usuario.

Aplique varias veces el método de descenso gradiente a la función f, con inicializaciones $\mathbf{x}_0$ distintas, de forma que se puedan obtener los diferentes mínimos locales de la función.

Muestre visualizaciones de diferentes secuencias de aproximaciones $\{\mathbf{x}_k\}$ convergiendo a cada uno de los mínimos locales de su función.