Métodos Numéricos II 2021

Lista 01

16.julio.2021

1. Algunas p-normas vectoriales y matriciales están relacionadas por desigualdades, casi siempre envolviendo a las dimensiones m y n. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pruebe que:

   a) $||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_2$.

   b) $||\mathbf{x}||_2 \leq \sqrt{n}\,||\mathbf{x}||_\infty$.

   c) $||A||_\infty \leq \sqrt{n}\,||A||_2$.

   d) $||A||_2 \leq \sqrt{m}\,||A||_\infty$.

2. En clase mostramos que si A es una matriz de rango 1, de la forma $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, entonces $||A||_2 = ||\mathbf{u}||_2\,||\mathbf{v}||_2$. ¿Vale lo mismo para la norma de Frobenius? Muestre o dé un contraejemplo.

3. Calcular (a mano) la descomposición SVD de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (Sugerencia: puede ayudarse primero calculando la descomposición espectral de alguna de las matrices A^TA ó AA^T, y luego usar las relaciones entre los vectores singulares derechos e izquierdos).

4. Utilice la descomposición SVD de la matriz B en el ejercicio anterior, para calcular los siguientes:

   a) $\mathrm{rank}(B)$.

   b) $\mathrm{Ker}(B)$.

   c) $\mathrm{Im}(B)$.

   d) $||B||_2$ y $||B||_F$.

5. a) Calcular el número de condición en la norma 2, para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}.$$

   ¿Qué se puede decir del error esperado, al resolver los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando se perturba la matriz del sistema?

   b) Compruebe su respuesta anterior comparando la soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   c) En contraste, compare ahora las soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 1001 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

   Discuta sus resultados.

6. a) Enuncie de nuevo las definiciones de algoritmo *estable* y *estable hacia atrás*. Explique con sus palabras la diferencia entre ambos.

   b) Leer el Capítulo 15 de Trefethen y Bau. Enuncie y demuestre el teorema 15.1. Explique las implicaciones de los números $\kappa(\mathbf{x})$ y ε_{maq} en este contexto.

7. El **radio espectral** $\rho(A)$ de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de define como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \ \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

   a) Muestre que $||A||_2 = \rho(A^T A)^{1/2} = \rho(AA^T)^{1/2}$.

   b) Muestre que para cualquier norma matricial inducida, $\rho(A) \leq ||A||$.

8. (No entregar). Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama **convergente** si $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \mathbf{0}$. Los siguientes son equivalentes:

   i) A es una matriz convergente.

   ii) $\lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0$, para alguna norma inducida.

   iii) $\lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0$, para toda norma inducida.

   iv) $\rho(A) < 1$.

   vi) $\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
