UFM UNIVERSIDAD FRANCISCO MARROQUÍN
VERITAS • LIBERTAS • JVSTITIA
FACULTAD de CIENCIAS ECONÓMICAS

Compresión de Imágenes usando PCA

Alan Reyes-Figueroa

Elements of Machine Learning (Aula 08) 02.febrero.2024

Teorema (Eckart-Young)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $n \geq d$, una matriz cuya descomposición SVD está dada por

$$A = USV^T = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Entonces, la matriz $\widehat{A}_r$ de rango r, $1 \leq r \leq d$, que mejor aproxima A en el sentido de minimizar

$$\min_{rank\ \widehat{A}_r \leq r} ||A - \widehat{A}_r||_F^2$$

se obtiene de truncar la descomposición en valores singulares de A:

$$\widehat{A}_r = U_r S_r V_r^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

Teorema (Eckart-Young)

donde

$$U_r = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_r],\ \ S_r = diag(\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_r),\ \ V_r = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_r].$$

En ese caso, el error de aproximación está dado por

$$||A - \widehat{A}_r||_F^2 = \sum_{i=r+1}^{d} \lambda_i,$$

o

$$||A - \widehat{A}_r||_2^2 = \lambda_{r+1}.$$

Aproximaciones de bajo rango

Obs!

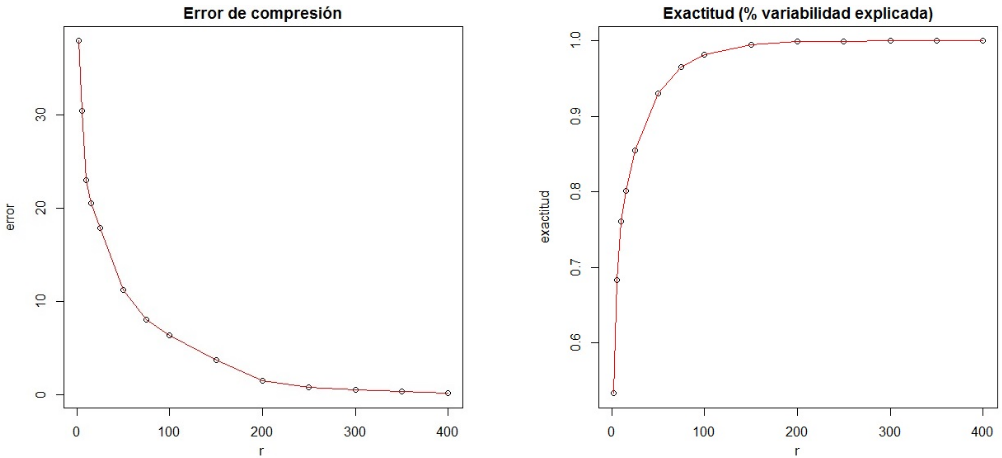
- Las direcciones $\mathbf{u}_i$ se llaman las **componentes principales** de $\mathbb{X}$.
- La descomposición SVD proporciona un mecanismo para proyectar los datos al "mejor" subespacio de dimensión $r \leq d$. Dicha proyección se obtiene haciendo
$$\mathbb{X}_{proj} = \mathbb{X}\, V_r.$$
- Los autovalores λ_i de $\mathbb{X}^T\mathbb{X}$ nos proporcionan un mecanismo para medir el error, vía $||A - \widehat{A_r}||_F^2 = \sum_{i=r+1}^{d} \lambda_i$.
- El cociente $\frac{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}, \quad r = 1, 2, \ldots, d$, se interpreta como el porcentaje de variabilidad de los datos $\mathbb{X}$ que es explicada por las primeras r componentes principales.
  Este se conoce usualmente como ***explained variance***.

Compresión de imágenes usando PCA.

Original $\quad r = 1 \quad r = 2 \quad r = 4 \quad r = 8 \quad r = 16 \quad r = 32 \quad r = 64$

Imagen Original (256×256), aproximaciones con rango = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Compresión de Imágenes



(a) Error de compresión en función de k. (b) % Varianza Explicada.