

REPASO DE PROBABILIDAD

ALAN REYES-FIGUEROA
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

(AULA 28) 05.MAYO.2025

Conceptos derivados: Probabilidad condicional

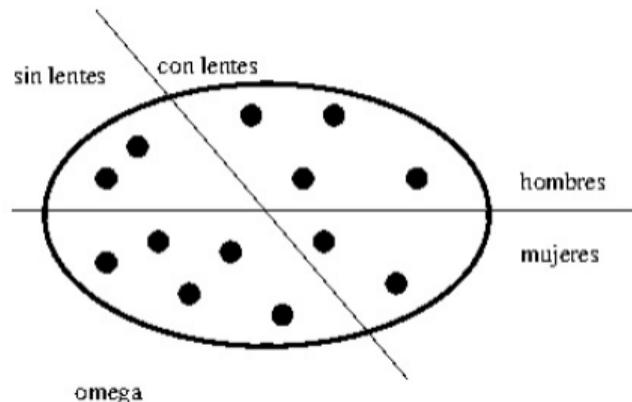
Se elige una persona al azar.
¿Cuál es la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{6}{13}$.

Alguien dice que es un hombre: ¿cuál es ahora la probabilidad que sea una persona con lentes? $\frac{2}{3}$.

Definición

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$



Probabilidad condicional

0.11		0.11
0.11	0.11	0.11
0.11	0.11	0.11

Observaciones:

- $\mathbb{P}(\cdot|B)$ define una nueva función de probabilidad sobre el espacio $\Omega' = B$.
- En consecuencia, $\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$.
- Observar que no hay ninguna relación directa entre $\mathbb{P}(A|B)$ y $\mathbb{P}(A|B^c)$.
- Siempre podemos escribir $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B)$.
(Esto no requiere el supuesto que $\mathbb{P}(B) > 0$) ¿Por qué?

Ejemplo

Experimento: Elegir al azar dos letras consecutivas de alguna palabra con alfabeto $T = \{a, b, c, d, e\}$.

Suponemos la siguiente distribución:

	a	b	c	d	e
a	0.10	0.05	0.10	0.04	0
b	0.01	0.01	0.10	0.01	0.04
c	0.02	0.05	0.05	0.10	0.01
d	0.04	0.10	0.01	0.01	0.02
e	0	0.10	0	0.01	0.02

¿Cuál es la probabilidad que la segunda letra seleccionada sea la “b” dado que sabemos que la anterior fue una vocal?

Ejemplo

Solución: Queremos calcular $\mathbb{P}(A|B)$, donde $B = \{\text{primera letra es vocal}\}$ y $A = \{\text{letra es } b\}$.

Entonces, de la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Pero, $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(\{ab, eb\}) = \mathbb{P}(ab) + \mathbb{P}(eb) = 0.05 + 0.10 = 0.15$.

Además, si X_1 es la primera letra y X_2 es la segunda, tenemos que

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X_1 = a) + \mathbb{P}(X_1 = e)$. Como $\mathbb{P}(X_1 = a) = 0.1 + 0.05 + 0.1 + 0.04 + 0 = 0.29$ y

$\mathbb{P}(X_1 = e) = 0 + 0.1 + 0 + 0.01 + 0.02 = 0.13$, entonces $\mathbb{P}(B) = 0.29 + 0.13 = 0.42$.

De allí que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.15}{0.42} = 0.35714286.$$

Ley de la probabilidad total

Teorema (Ley de la probabilidad total, caso finito)

Dada una partición $\{B_i\}_{i=1}^n$ de Ω , tal que $\mathbb{P}(B_i) > 0, \forall i$, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i).$$

Prueba: $\Omega = \bigcup B_i$, ya que es una partición. Luego

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup B_i = \bigcup (A \cap B_i),$$

y los $A \cap B_i$ forman una partición de A . Por el axioma de aditividad, y la definición de probabilidad condicional

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i).$$

Ejemplo

Se tienen tres cajas, cada una conteniendo 100 cartas:

La caja 1 contiene 75 cartas rojas, y 25 cartas azules,
la caja 2 contiene 60 cartas rojas, y 40 cartas azules,
la caja 3 contiene 55 cartas rojas, y 45 cartas azules.

Se elige una de las cajas al azar, y luego se elige una carta dentro de la caja seleccionada.

¿Cuál es la probabilidad de elegir una carta roja?

Ejemplo

Solución: Considere los eventos $A =$ elegir carta roja, y

$E_1 =$ elegir caja 1, $E_2 =$ elegir caja 2, $E_3 =$ elegir caja 3.

Sabemos que $\mathbb{P}(A|E_1) = \frac{75}{100}$, $\mathbb{P}(A|E_2) = \frac{60}{100}$ y $\mathbb{P}(A|E_3) = \frac{55}{100}$.

Entonces, por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(A|E_2)\mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(A|E_3)\mathbb{P}(E_3) \\ &= \frac{75}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{190}{300} = 0.6333\end{aligned}$$

Regla de Bayes

Teorema (Regla de Bayes)

Si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prueba: Por hipótesis, $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Despejando $\mathbb{P}(A \cap B)$ de la segunda ecuación, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)$, y sustituyendo en la primera

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ejemplo

Una compañía ha desarrollado una prueba para detectar la presencia de SARS-CoV-2 (Covid-19). Se pretende que

$\mathbb{P}(\text{prueba es positiva}|\text{tiene covid}) = 0.97$ y

$\mathbb{P}(\text{prueba es negativa}|\text{no tiene covid}) = 0.98$.

Si el 1% de la población tiene Covid, calcular la probabilidad de que la persona tenga Covid, cuando el test da negativo.

Bajo las mismas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que la persona no tiene Covid, cuando el test da positivo?

Ejemplo

Solución:

y: Test x: Real	No = 0	Sí = 1
No = 0		
Sí = 1		

Datos: $\mathbb{P}(x = 1) = 1/100$,
 $\mathbb{P}(y = 1|x = 1) = 0.97$,
 $\mathbb{P}(y = 0|x = 0) = 0.98$. Queremos calcular
 $\mathbb{P}(x = 1|y = 0)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x = 1|y = 0) &= \frac{\mathbb{P}(y = 0|x = 1) \mathbb{P}(x = 1)}{\mathbb{P}(y = 0)} \\ &= \frac{(1 - \mathbb{P}(y = 1|x = 1)) \mathbb{P}(x = 1)}{\mathbb{P}(y = 0|x = 0) \mathbb{P}(x = 0) + \mathbb{P}(y = 0|x = 1) \mathbb{P}(x = 1)} \\ &= \frac{0.03(0.01)}{0.02(0.99) + 0.03(0.01)} = 0.01492\end{aligned}$$