UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Estadísticos

Alan Reyes-Figueroa

Inteligencia Artificial

(Aula 05) 27.enero.2025

Estadísticos

aula03/distrib.jpg

Valores numéricos (o vectoriales) en términos de la variable aleatoria.
Resumen de una distribución.
Existen estadísticos con varios propósitos: localización, variabilidad, ...

Promedio: El **promedio** o **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X)$, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

en caso de que la suma exista.

Comentario: En la vida cotidiana usamos como promedio de $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esperanza

En general,

Definición

*Dada una función $g(\cdot)$, se define la **esperanza** $\mathbb{E}(g(X))$ como:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X = x),$$

en caso de que la suma exista.

Proposición

1. *(Linealidad)* $\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) = a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2)$.
2. *(Independencia) Si X_1, X_2 son independientes, entonces* $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2)$.

Esperanza

Prueba:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX_1 + bX_2) &= \sum_{\omega}(aX_1 + bX_2)(\omega)\mathbb{P}(\omega) = a\sum_{\omega} X_1(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_{\omega} X_2(\omega)\mathbb{P}(\omega)\\ &= a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Como $X_1 \perp X_2$, entonces $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)$. Luego

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{(x_1,x_2)} (X_1X_2)(\omega)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)\\ &= \sum_{(x_1,x_2)} X_1(x_1)X_2(x_2)\mathbb{P}(X_1 = x_2)\,\mathbb{P}(X_2 = x_2)\\ &= \Big(\sum_{x_1} X_1(x_1)\,\mathbb{P}(x_1)\Big)\Big(\sum_{x_2} X_2(x_2)\,\mathbb{P}(x_2)\Big) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2).\end{aligned}$$

Ejemplo

a) ¿Cuál es la esperanza de una v.a. constante?

b) Calcular $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X)$.

<u>Solución</u>:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x) = c\,\mathbb{P}(X = c) = c(1) = c$.

b) $\mathbb{E}(3X + 2\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}X) = 3\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(X) = 5\mathbb{E}(X)$.

Media, mediana y moda

Media: Sea una variable aleatoria discreta X con probabilidad $\mathbb{P}$. La **esperanza** (*expectativa*, *valor esperado*) de X se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Mediana: Una **mediana** de X es cualquier valor $t \in \mathbb{R}$ que satisface $F_X(t) = \frac{1}{2}$. Dicho de otra manera, son las preimágenes $F_X^{-1}(1/2)$.

Obs! F_X en general no es invertible!! Denotamos $Q_X : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ a la *función de cuantiles*, la inversa generalizada de F_X:

$$Q_X(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq \alpha\}, \quad \text{para } 0 < \alpha < 1.$$

Media, mediana y moda

Obs! Existen cuatro formas de definir la función de cuantiles. Para $0 < \alpha < 1$:

- $Q_X(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq \alpha\}$.
- $Q_X(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < \alpha\}$.
- $Q_X(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$.
- $Q_X(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}$.

En general, las cuatro definiciones dan resultados distintos (aunque pueden coincidir en función de las propiedades de la distribución y del punto en que se aplica).

Moda: Una **moda** de la distribución de X es cualquier máximo local de f_X. (unimodal, bimodal, ...)

Centros y localización

El valor esperado $\mathbb{E}(X)$ tiene otra propiedad importante:
es el valor constante que minimiza la suma de errores cuadrados. Dado $\{x_i\}_{i=1}^n$ la imagen de la v.a. X, sea $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Queremos

$$minimizar\ J(c) = \ minimizar\ \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - c)^2.$$

<u>Solución</u>: Derivando con respecto de c, obtenemos
$J'(c) = 2\sum_{i=1}^n p_i(x_i - c) = 0.$
Luego $\sum_{i=1}^n p_i x_i = c\sum_{i=1}^n p_i = c \;\Rightarrow\; c = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$

- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i|x_i - c|_1$ es: la *mediana* de X.
- El valor que minimiza $\sum_{i=1}^n p_i|x_i - c|_0$ es: la *moda* de X.

Definición

Para la v.a. X y para un evento $A \in \mathcal{F}$, se define el ***promedio condicional*** *(o* ***esperanza condicional****) de X dado A como*

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid A).$$

Definición

Para las v.a. X y Y, se define la ***esperanza condicional*** *de X dado que Y es igual a un valor y, como*

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x \mid Y = y).$$

Esperanza condicional

En general, definimos $\mathbb{E}(g(X) \mid Y = y) = \sum_x g(x)\, \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

Proposición

Sean X, Y, Z v.a., $a, b \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{E}(a \mid Y) = a$.
2. $\mathbb{E}(aX + bZ \mid Y) = a\mathbb{E}(X \mid Y) + b\mathbb{E}(Z \mid Y)$.
3. $\mathbb{E}(X \mid Y) \geq 0$ *si* $X \geq 0$.
4. $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$ *si* X, Y *son independientes.*
5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)$.
6. $\mathbb{E}(Xg(Y) \mid Y) = g(Y)\mathbb{E}(X \mid Y)$. *En particular,* $\mathbb{E}(g(Y) \mid Y) = g(Y)$.
7. $\mathbb{E}(X \mid Y, g(Y)) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.
8. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y, Z) \mid Y) = \mathbb{E}(X \mid Y)$.

Proposición (Ley de la probabilidad total para esperanzas)

Sean X, Y v.a. discretas, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y} \mathbb{E}(X \mid Y = y)\, \mathbb{P}(Y = y).$$

Ejemplo: Alguien anda perdido en la subterranea de Guanajuato. Está en un cruce con 3 opciones. Un camino le lleva a la salida en 10 minutos en promedio, un segundo camino le regresa a su lugar en promedio 15 minutos y un tercer camino le regresa a su lugar en promedio 5 minutos. Siempre elige alguna opción, independiente del pasado. ¿Cuánto va a tardar en promedio para salir?

Solución:

- Opción 1: salida del subterráneo en 10m promedio.
- Opción 2: regresa al mismo lugar en 15m promedio.
- Opción 3: regresa al mismo lugar en 5m promedio.

Definimos $E_i =$ elegir opción i, $i = 1, 2, 3$. T la v.a. $=$ tiempo de salida.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}(T \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i) \\
&= \mathbb{E}(T \mid E_1)\cdot\tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_2)\cdot\tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(T \mid E_3)\cdot\tfrac{1}{3} \\
&= (10m)\cdot\tfrac{1}{3} + (15m + \mathbb{E}(T))\cdot\tfrac{1}{3} + \mathbb{E}(5m + \mathbb{E}(T))\cdot\tfrac{1}{3} \\
&= \tfrac{10}{3}m + \tfrac{15}{3}m + \tfrac{5}{3}m + \tfrac{2}{3}\mathbb{E}(T).
\end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{3}\mathbb{E}(T) = 10m \;\Rightarrow \mathbb{E}(T) = 30m$.

Definición

*Sea X una v.a. en $\mathbb{R}$. Definimos su **varianza** como:*

$$Var(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big] = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2,$$

en caso de que este valor esperado exista.

<u>Propiedades:</u>

- $Var(X) \geq 0$.
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces

$$Var(aX_1 + bX_2) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2).$$

Varianza

Prueba:

- $$Var(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) = \sum_x (\cdot)^2 \mathbb{P}(\cdot) \geq 0,$$

  por ser suma de términos no-negativos.

- $$\begin{aligned} Var(aX) &= \mathbb{E}\big((aX - \mathbb{E}(aX)^2\big) = \mathbb{E}\big((aX - a\mathbb{E}X)^2\big) \\ &= \mathbb{E}\big(a^2(X - \mathbb{E}X)^2\big) = a^2\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)^2\big) \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

Varianza

Prueba: Suponga que X_1, X_2 son independientes. Entonces, $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$. Luego

$$
\begin{aligned}
Var(aX_1 + bX_2) &= \mathbb{E}\big([(aX_1 + bX_2) - \mathbb{E}(aX_1 + bX_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big([a(X_1 - \mathbb{E}X_1) + b(X_2 - \mathbb{E}X_2)]^2\big) \\
&= \mathbb{E}\big(a^2(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 + b^2(X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 + 2ab(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)^2\big) + b^2\mathbb{E}\big((X_2 - \mathbb{E}X_2)^2\big) + 2ab\mathbb{E}\big((X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\mathbb{E}\big(X_1X_2 - X_1\mathbb{E}X_2 - (X_2\mathbb{E}X_1 + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2) + (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) \\
&= a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2) + 2ab\big(\mathbb{E}(X_1X_2) - (\mathbb{E}x_1)(\mathbb{E}X_2)\big) = a^2Var(X_1) + b^2Var(X_2).
\end{aligned}
$$

Definición

*Dada dos variables aleatorias X_1, X_2 (definidas sobre el mismo espacio). Definimos su **covarianza** como:*

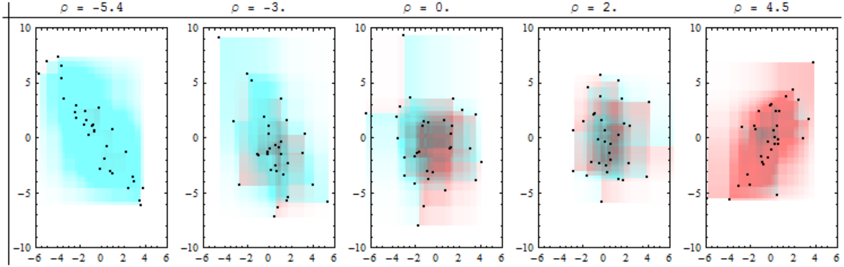
$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}\big[(X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2)\big],$$

en caso de que este valor esperado exista.

Propiedades:

- $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$.
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$.
- $Cov(aX, X) = aVar(X)$.
- Si X_1, X_2 son independientes, entonces $Cov(X_1, X_2) = 0$.

Covarianza



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Definición

Dada dos variables aleatorias X, Y, definimos su ***correlación*** *(o* ***coeficiente de correlación****) como:*

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}}.$$

Propiedades:

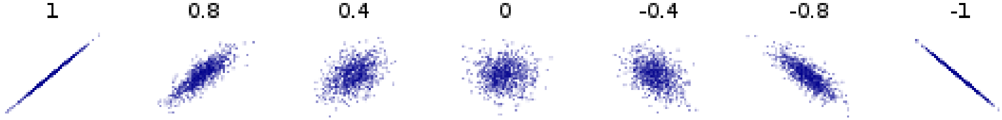
- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$.
- $\rho(aX, X) = sign(a)$.
- Si X, Y son independientes, entonces $\rho(X, Y) = 0$.

Correlación

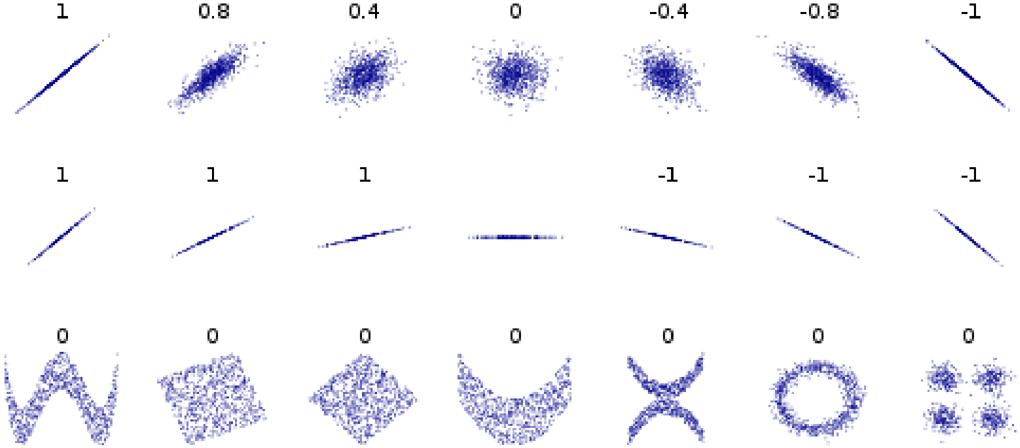
Por ejemplo, para el caso de dos v.a. normales X y Y:

aula04/multivariate-normal.png

tenemos



Correlación



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Entropía

Ya vimos que la varianza presenta limitaciones (igual que la covarianza).

Punto de partida: medir la sorpresa asociada el evento $X = x$, $I(x)$. La entropía es el valor esperado de esta sorpresa $\mathbb{E}(I(x))$.
¿Cómo medimos esta sorpresa o incerteza?

- Un evento que ocurre con alta probabilidad no genera sorpresa.
- Un evento que ocurre con baja probabilidad genera mayor sorpresa (más entre menor es $\mathbb{P}$).

¿Cómo definir $I(x)$? Tenemos varias alternativas simples

$$I(x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = x)}, \qquad I(x) = 1 - \mathbb{P}(X = x), \qquad I(x) = -\log \mathbb{P}(X = x).$$

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Shannon*** *como:*

$$H(X) = -\sum_x \mathbb{P}(X=x)\,\log \mathbb{P}(X=x).$$

Comentario: Shannon definió la entropía en un contexto de teoría de la información (bits), usa $\log_2$. Si $p=0$, usualmente se define $p\log p = 0$.

Definición

Sea X una v.a. discreta. Definimos su ***entropía de Gini*** *o* ***coeficiente de Gini*** *por:*

$$G(X) = \sum_x \mathbb{P}(X=x)\,\big(1-\mathbb{P}(X=x)\big) = 1 - \sum_x \mathbb{P}(X=x)^2.$$

Ejercicios

1. Dibuja dos distribuciones o variables aleatorias (discretas) distintas, con mismo promedio y entropía, pero varianza diferentes.

2. Toma una v.a. $X \in \{0, 1\}$. Calcular la varianza y la entropía de Shannnon y de Gini en función de $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

   Compara la gráficas de $H(X)$ y $2G(X)$.

3. ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo para $H(X)$ y $G(X)$?

Entropía condicional

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***entropía condicional*** *de X dado Y es*

$$H_Y(X) = \mathbb{E}H(X \mid Y) = -\sum_y \Big(\sum_x \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) \log \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\Big)\mathbb{P}(Y = y).$$

Obs. No es simétrica: $H_Y(X) \neq H_X(Y)$.

Definición

Sean X, Y dos variables aleatorias, la ***información mutua*** *de X y Y está dada por*

$$I(X, Y) = H(X) - H_Y(X).$$

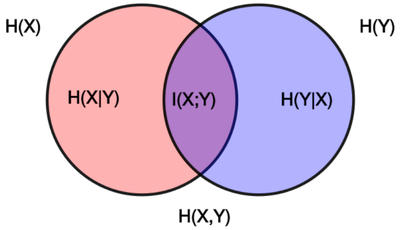
Proposición

$I(X, Y) = I(Y, X)$.

Definición

*La **entropía conjunta** de X y Y es*

$$H(X,Y) = -\sum_x \sum_y \mathbb{P}(x,y) \log \mathbb{P}(x,y).$$



Un diagrama de Venn que muestra relaciones aditivas y sustractivas entre varias medidas de información asociadas con las variables X y Y. El área contenida por ambos círculos es la entropía conjunta $H(X,Y)$. El círculo de la izquierda (rojo y violeta) es la entropía individual $H(X)$, siendo el rojo la entropía condicional $H_Y(X)$. El círculo de la derecha (azul y violeta) es $H(Y)$, y el azul es $H_X(Y)$. El violeta es la información mutua $I(X,Y)$.

Definición

*Sean P una distribución discreta de probabilidad, la **entropía** de P es*

$$H(P) = -\sum_x P(x)\log P(x).$$

Definición

*Sean P, Q dos distribuciones discretas de probabilidad, la **entropía cruzada** (cross-entropy) de P y Q es*

$$H(P,Q) = -\sum_x P(x)\log Q(x).$$

*Además, la **divergencia de Kullback-Leibler** de P y Q se define como*

$$\begin{aligned} D_{KL}(P \parallel Q) &= -\sum_x P(x)\log\frac{Q(x)}{P(x)} \\ &= -\sum P(x)\log Q(x) + \sum P(x)\log P(x) = H(P,Q) - H(P). \end{aligned}$$

Distribuciones conjuntas

Cuando tenemos varias variables aleatorias (definida sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, podemos estudiar la distribución conjunta de dichas variables, esto es, la distribución de (X, Y).

Definición

*La **distribución conjunta** de las v.a. X y Y se define por*

$$F_{X,Y}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*En el caso que X y Y son v.a. discretas, su **probabilidad conjunta** es*

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*En el caso en que X y Y son continuas, su **densidad conjunta** es*

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial y \partial x}, \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

aula04/multivariate-

La normal bivariada es la distribución conjunta en

Distribuciones marginales

Cuando tenemos varias variables aleatorias y su distribución conjunta, podemos “regresar" a las distribuciones originales.

Definición

Dadas X y Y v.a. discretas y su distribución conjunta $\mathbb{P}_{X,Y}$, la ***distribución marginal*** *para X y para Y son*

$$\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}(x,y), \quad \mathbb{P}_Y(y) = \sum_x \mathbb{P}(x,y).$$

En el caso que X y Y son v.a. continuas, y $f_{x,y}$ es su densidad conjunta, la ***densidad marginal*** *de X y de Y son*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx.$$

Distribuciones marginales

Ahora, si X, Y toman valores en $[a, b] \times [c, d]$, la **distribución marginal** se calcula como

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_a^x \int_b^y f_{X,Y}(s, t)\, ds\, dt.$$

luego $F_X(x) = F_{X,Y}(x, d), \quad F_Y(y) = F_{X,Y}(b, y)$, y en el caso $b = \infty$ ó $d = \infty$

$$F_X(x) = \lim_{d\to\infty} F_{X,Y}(x, d), \quad F_Y(y) = \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(b, y).$$

Definición

Sean X, Y v.a. discretas tales que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. La ***probabilidad condicional*** *de Y dado $X = x$ es*

$$\mathbb{P}_{Y|X}(y \mid x) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{\mathbb{P}_{X,Y}(x,y)}{\mathbb{P}_X(x)}.$$

En el caso continuo, la ***densidad condicional*** *de Y dado X es*

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Podemos escribir

- $\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}_{X|Y}(x \mid y)\, \mathbb{P}_Y(y)$.
- $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x \mid y)\, f_Y(y)\, dy$.

Independencia

Definimos la independencia de variables aleatorias de la siguiente manera:

Definición

Dos variables aleatorias discretas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son ***independientes*** *si*

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \cdot \mathbb{P}_Y$.
En general, las v.a. discretas $X_1, \ldots, X_n$ son ***mutuamente independientes*** *si*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i), \;\; \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \cdot \mathbb{P}_{X_2} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{X_n}$.

Definición

*Dos variables aleatorias continuas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son **independientes** si*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

*En general, las v.a. continuas $X_1, \ldots, X_n$ son **mutuamente independientes** si*

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Independencia

Casi siempre, una condición necesaria para que las variables X y Y sean independientes es que el *soporte* de (X, Y) (la región de $\mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{P}_{X,Y} > 0$) sea un dominio rectangular, o producto de uniones de intervalos:

Ejemplo:
¿Cuáles variables X y Y son independientes?