Inteligencia Artificial 2024

Lista 03

08.abril.2024

1. Considere el siguiente experimento: Se lanza un dado regular. Si mientras se obtenga un 1 ó un 6, el dado es lanzado nuevamente. En caso contrario, el experimento termina.

   a) Describa un espacio de probabilidad para este experimento.
   b) ¿Cuál es la distribución asociada al número de lanzamientos?
   c) Simule en su computador un experimento de este tipo, en donde se cuenta el número de lanzamientos n en el experimento. Repetir esto un número N de veces ($N = 10, 100, 1000, 10000$). Para cada N, mostrar una función de masa de probabilidad obtenida con los resultados de su simulación. Comparar las distribuciones obtenidas al ir variando N, y discutir si los resultados se asemejan a la distribución teórica.

2. Ahora consideramos el siguiente experimento: Se lanzan 2 dados regulares, y se obtiene el valor de la suma de ambos D_1+D_2.

   a) Describa un espacio de probabilidad para este experimento. ¿Cuál es la distribución de D_1? ¿Cuál es la distribución asociada a la suma $D_1 + D_2$?
   b) Simular en el computador N experimentos de este tipo, en donde en cada uno se calcula el valor de la suma $S = D_1+D_2$. Al final de los N experimentos, calcular el valor promedio obtenido de estas sumas:
   $$\overline{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(D_{1i} + D_{2i}).$$
   c) Repetir este cálculo de los promedio un total de $M = 5, 10, 50, 100, 200$ veces. En cada uno, graficar la distribución de los promedios.
   d) ¿Qué se puede concluir sobre los promedios? ¿Por qué ocurre esto?

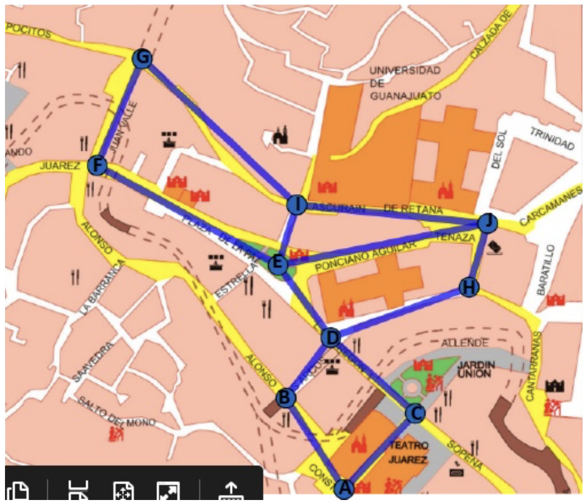
3. Asumiendo que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, mostrar que las tres definiciones de independencia son equivalentes. Esto es, mostrar que:
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

4. El diagnóstico de un médico con respecto a uno de sus pacientes es incierto. Ella duda entre tres posibles enfermedades. A partir de la experiencia pasada, pudimos construir la siguientes tablas: donde las E_i's representan las enfermedades y los S_j's los síntomas. Además, nosotros asumimos que los cuatro síntomas son incompatibles, exhaustivos y equiprobables.

   a) Independientemente del síntoma presente en el paciente, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella sufra de la primera enfermedad?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente padezca la segunda enfermedad y presente el síntoma S_1?
   c) Dado que el paciente padece la tercera enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que él o ella presenta el síntoma S_2?
   d) Consideramos dos pacientes independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que no sufren de la misma enfermedad, si asumimos que las tres enfermedades son incompatibles?

S_i	S_1	S_2	S_3	S_4
$\mathbb{P}(E_1 \mid S_i)$	0.2	0.1	0.6	0.4
$\mathbb{P}(E_2 \mid S_i)$	0.2	0.5	0.5	0.3
$\mathbb{P}(E_3 \mid S_i)$	0.6	0.3	0.1	0.2

5. Consideren el siguiente grafo:



Cada calle (arista) entre dos nodos está bloqueada por una manifestación con probabilidad p $(0 < p < 1)$. Supongamos que todos son eventos independientes. Calcular la probabilidad de poder caminar desde el punto A (nodo más abajo) al punto J (nodo más a la derecha).

6. Simular en Python un recorrido a través del grafo del Ejercicio 5, mediante una matriz de probabilidades de transición (una cadena de Markov).
   Asumimos que el recorrido siempre comienza en el nodo A.

   6.1) En el caso en que se puede regresar por los caminos.

   6.2) En el caso en que no se puede regresar (sólo avanzar de una letra a una de mayor o igual valor).

   Con esta matriz (elegir sólo una de las anteriores), simular:

   a) La distribución del número de pasos necesarios para llegar por primera vez al nodo J.

   b) La distribución de posiciones en los nodos después de M movimientos. Probar para un valor muy grande de N experimentos y M movimientos. Este es el llamado estado estacionario de la cadena de Markov.