Distribuciones Multivariadas

Alan Reyes-Figueroa

Inteligencia Artificial (Aula 22) 15.abril.2024

Distribuciones Multivariadas

Definición

*Sean X, Y variables aleatorias discretas, con valores $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$ y $Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$. La **distribución conjunta** de X y Y, se puede entender como la distribución del vector aleatorio (X, Y) (en $\mathbb{R}^2$), y está dada por*

$$p_{ij} = \mathbb{P}_{(}X = x_i, Y = y_j), \qquad i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n.$$

Esta probabilidad conjunta satisface:

- $p_{ij} \geq 0$.
- $\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.
- Se representa usualmente a través de una tabla

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$\dots$	$Y = y_n$
$X = x_1$	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X = x_m$	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

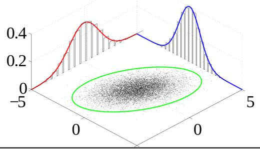
Definición

Sean X, Y variables aleatorias continuas, con valores en $\mathbb{R}$. Describimos la ***distribución conjunta*** *de X y Y, mediante una* ***densidad conjunta*** *$f(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$ tal que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$*

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\, dxdy.$$

Esta densidad conjunta satisface:

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$.
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = 1$.
- Se representa usualmente a través de una función bivariada



Definición

La ***distribución conjunta*** *de X y Y, (o* ***función de distribución conjunta****) $F_{X,Y}$ de define por*

- *En el caso discreto:*

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i \leq x} \sum_{j \leq y} p_{ij}.$$

- *Y en el caso continuo:*

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\, dtds.$$

Al igual que en variables aleatorias 1-dimensionales, las funciones de distribución siempre son no-negativas, no-decrecientes, y $0 \leq F(x,y) \leq 1$.

Distribuciones conjuntas

Cuando tenemos varias variables aleatorias (definida sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), podemos estudiar la distribución conjunta de dichas variables, esto es, la distribución de (X, Y).

Definición

*La **distribución conjunta** de las v.a. X y Y se define por*

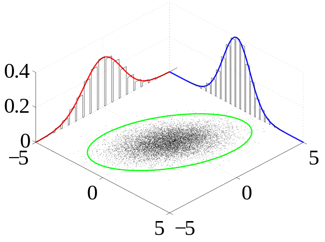
$$F_{X,Y}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*En el caso que X y Y son v.a. discretas, su **probabilidad conjunta** es*

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

*En el caso en que X y Y son continuas, su **densidad conjunta** es*

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(s,t)}{\partial y \partial x}, \;\; \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$



La normal bivariada es la distribución conjunta entre dos normales.

Ejemplo 1:

	1	2	3	4
1	0.24	0.01	0.00	0.00
2	0.08	0.03	0.15	0.00
3	0.01	0.08	0.16	0.00
4	0.00	0.00	0.08	0.18

Calcular $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(Y >= 3)$, $\mathbb{P}(X > 2, Y \leq 2)$.

Calcular la distribución conjunta $F_{X,Y}$.

Ejemplo 2:
Consideremos la densidad conjunta de X y Y dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} cxye^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Calcular la constante c.

Calcular $\mathbb{P}(X + Y \geq 1)$.

Ejemplo 3:

En una comunidad el 30% de habitantes son Hobbits, 40% son Orcos, y el resto son Elfos. Para cada personaje elegido al azar, consideramos

$$X = \begin{cases} 1, & \text{es Hobbit;} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{es Orco;} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (X, Y).

Distribuciones marginales

Cuando tenemos varias variables aleatorias y su distribución conjunta, podemos “regresar" a las distribuciones originales.

Definición

Dadas X y Y v.a. discretas y su distribución conjunta $\mathbb{P}_{X,Y}$, la ***distribución marginal*** *para X y para Y son*

$$\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}(x,y), \quad \mathbb{P}_Y(y) = \sum_x \mathbb{P}(x,y).$$

En el caso que X y Y son v.a. continuas, y $f_{x,y}$ es su densidad conjunta, la ***densidad marginal*** *de X y de Y son*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx.$$

Distribuciones marginales

Ahora, si X, Y toman valores en $[a, b] \times [c, d]$, la **distribución marginal** se calcula como

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_a^x \int_b^y f_{X,Y}(s,t)\, ds\, dt.$$

luego $F_X(x) = F_{X,Y}(x,d), \quad F_Y(y) = F_{X,Y}(b,y)$, y en el caso $b = \infty$ ó $d = \infty$

$$F_X(x) = \lim_{d \to \infty} F_{X,Y}(x,d), \quad F_Y(y) = \lim_{b \to \infty} F_{X,Y}(b,y).$$

Distribuciones condicionales

Definición

Sean X, Y v.a. discretas tales que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. La ***probabilidad condicional*** *de Y dado $X = x$ es*

$$\mathbb{P}_{Y|X}(y \mid x) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(Y = y, X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{\mathbb{P}_{X,Y}(x, y)}{\mathbb{P}_X(x)}.$$

En el caso continuo, la ***densidad condicional*** *de Y dado X es*

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Podemos escribir

- $\mathbb{P}_X(x) = \sum_y \mathbb{P}_{X|Y}(x \mid y)\, \mathbb{P}_Y(y)$.
- $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)\, dy$.

Independencia

Definimos la independencia de variables aleatorias de la siguiente manera:

Definición

Dos variables aleatorias discretas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son ***independientes*** *si*

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \cdot \mathbb{P}_Y$.

En general, las v.a. discretas $X_1, \ldots, X_n$ son ***mutuamente independientes*** *si*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i), \quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

o equivalentemente, $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \cdot \mathbb{P}_{X_2} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}_{X_n}$.

Definición

*Dos variables aleatorias continuas X y Y definidas sobre el mismo espacio Ω son **independientes** si*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

*En general, las v.a. continuas $X_1, \dots, X_n$ son **mutuamente independientes** si*

$$F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Independencia

Casi siempre, una condición necesaria para que las variables X y Y sean independientes es que el *soporte* de (X, Y) (la región de $\mathbb{R}^2$ donde $\mathbb{P}_{X,Y} > 0$) sea un dominio rectangular, o producto de uniones de intervalos:

Ejemplo:
¿Cuáles variables X y Y son independientes?