Geometría Diferencial 2026

Examen Parcial 1

26.marzo.2026

Resolver la siguiente lista de enunciados, junto con una explicación visual de su solución. **Entrega: jueves 9 de abril.**

Ejercicio 1: (15 puntos)
Sea $\alpha(s)$ una curva en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por longitud de arco, con $\kappa(s) > 0$. Pruebe que si $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c$ es constante, entonces el vector binormal $\mathbf{B}(s)$ mantiene un ángulo constante con una dirección fija $\mathbf{u}$.
(Sugerencia: Considerar el vector $\mathbf{a} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$, Ejemplo: piense en una hélice circular).

Ejercicio 2: (15 puntos)
(a) Explique intuitivamente el significado de la fórmula de Cauchy-Crofton para la longitud de una curva plana. ¿Cómo se relaciona la medida de las rectas que intersecan a la curva con su longitud total?

(b) Explique cómo se puede derivar un método para estimar la longitud de una curva plana, a partir de la córmula de Cauchy-Crofton.

Ejercicio 3: (15 puntos)
Considere el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$. Damos dos parametrizaciones para esta superficie: $\mathbf{x}_1(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ y $\mathbf{x}_2(\bar{u}, \bar{v}) = (\sin \bar{u}, \cos \bar{u}, \bar{v})$.

a) Indique dominios adecuados para ambas parametrizaciones, y el dominio de los cambios de coordenadas $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_1^{-1} \circ \mathbf{x}_2$.
b) Calcule el determinante del Jacobiano del cambio de coordenadas e interprete si estas cartas preservan o invierten la orientación.

Ejercicio 4: (10 puntos)
Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y sea $A : S^2 \to S^2$ el mapa antipodal $A(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$. Calcule la derivada $DA_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S^2 \to T_{-\mathbf{p}}S^2$ y muestre que es una isometría lineal.

Ejercicio 5: (15 puntos)
Mostrar que el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ es difeomorfo al disco puncturado $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{(0, 0)\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 = 0 < u^2 + v^2 < 1\}$.

Ejercicio 6: (15 puntos)
Mostrar que la botella de Klein $\mathbb{K}$ no es orientable. Para ello, puede considerar el siguiente modelo de la botella de Klein:

$$\mathbb{K} = [0, 1] \times [0, 1] \;/\sim, \quad \text{donde } (u, 0) \sim (u, 1), \text{ y } (0, v) \sim (1, 1 - v),$$

u otro modelo similar.

Ejercicio 7: (15 puntos)
Consideramos ahora la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ con la proyección estereográfica **estándar**. Sea $\mathbf{x}_N(u, v)$ la parametrización dada por la proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y $\mathbf{x}_S(\bar{u}, \bar{v})$ la parametrización obtenida mediante la proyección estereográfica desde el polo sur $S = (0, 0, -1)$.
Deduzca la expresión de los mapeos $\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N^{-1}, \mathbf{x}_S$ y $\mathbf{x}_S^{-1}$.